Corrigé DS n° 2

Exercice 1 *7 points*

1) $u_1 = 31$; $u_2 = 331$; $u_3 = 3331$ *1 point*
2) Initialisation : $3u_0 = 3 = 10 - 7$; OK

On suppose que pour n donné , $3u_n = 10^{n+1} - 7$

Alors : $3u_{n+1} = 3(10u_n + 21) = 30u_n + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{n+2} - 7$

On a donc $3u_n = 10^{n+1} - 7$ pour tout n *1 point*

3) Nous allons regarder si les entiers premiers compris entre 2 et $\sqrt{331} = 18{,}9$ divisent 331 . De façon immédiate , 2 , 3 , 5 et 11 ne divisent pas 331 . On teste à la calculatrice avec 7 , 13 et 17 . 331 n'est pas divisible par ces trois nombres , donc 331 est premier *1 point*
4) a) On travaille modulo 2 : $u_n \equiv -7[2] \equiv 1[2]$ donc u_n n'est pas divisible par 2 *1 point*

b) Supposons u_n divisible par 3 , alors $3u_n$ est divisible par 9 . Travaillons modulo 9 , $10^{n+1} - 7 \equiv 1 + 2 \equiv 3[9]$ n'est pas divisible par 9 . Contradiction avec la formule du 2) *1 point*

c) Travaillons modulo 5 : $3u_n = 10^{n+1} - 7$ devient : $3u_n \equiv -7[5] \equiv 3[5]\ donc\ u_n \equiv 1[5]$ et donc u_n n'est pas divisible par 5 *1 point*

5) $3u_n = 10^{n+1} - 7 \equiv 10 \times 10^n + 4[11] \equiv -1 \times (-1)^n + 4[11]$ *1 point*

Exercice 2 *6 points*

1) $2 \equiv 2[5]$; $2^2 \equiv -1[5]$; $2^4 \equiv 1[5]$ donc les restes dans la division par 5 sont : $2^{4k} \equiv 1[5]\,, 2^{4k+1} \equiv 2[5]\,, 2^{4k+2} \equiv 4[5]\,, 2^{4k+3} \equiv 3[5]$ *1,5 points*
2) $5 \equiv 5[7]\,, 5^2 \equiv 4[7]\,, 5^3 \equiv -1[7]\,, 5^6 \equiv 1[7]$ donc les restes dans la division par 7 sont : $5^{6k} \equiv 1[7]\,, 5^{6k+1} \equiv 5[7]\,, 5^{6k+2} \equiv 4[7]\,, 5^{6k+3} \equiv 6[7]\,, 5^{6k+4} \equiv 2[7]$,

$5^{6k+5} \equiv 3[7]$ *1,5 points*

3) $2 \equiv 2[7]$; $2^2 \equiv 4[7]$; $2^3 \equiv 1[7]$ donc les restes dans la division par 7 sont : $2^{3k} \equiv 1[7]\,, 2^{3k+1} \equiv 2[7]\,, 2^{3k+2} \equiv 4[7]$ *1 point*
4) $12 \equiv 2[5]\ donc\ 12^{1527} \equiv 2^{1527}[5] \equiv 2^{4\times381+3}[5] \equiv 3[5]$ par 1) *1 point*
5) $19^{52} \times 23^{41} \equiv 5^{52} \times 2^{41}[7] \equiv 5^{6\times8+4} \times 2^{3\times13+2}[7] = 2 \times 4[7] \equiv 1[7]$ *1 point*

Exercice 3 *7 points*

1) $u_0 = 2$; $u_1 = 10$; $u_2 = 48$; $u_3 = 250$; $u_4 = 1392$; $u_5 = 8050$ *2 points*
2) On travaille modulo 2 : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0[2]$ donc u_n est pair *1,5 points*
3) On travaille modulo 4 . n doit être entier pair non nul donc n > 1 :

Corrigé DS n° 2

On a : $2^n \equiv 0[4]\ si\ n \geq 2$; $3^2 \equiv 1[4]\ donc\ 3^n \equiv 1[4]\ pour\ tout\ n$;

$$6 \equiv 2[4]\ donc\ 6^2 \equiv 0[4]\ et\ 6^{2k} \equiv 0[4]$$

On a donc si n pair non nul , $u_n \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0[4]$ et u_n divisible par 4 si n est pair non nul *2 points*

4) De façon évidente , puisque les éléments de E sont premiers , 4 n'appartient pas à E

Par la question 2) , u_n est pair donc divisible par 2 donc 2 appartient à E

5 divise $u_1 = 10$ donc 5 appartient à E

3 divise $u_2 = 48$ donc 3 appartient à E

7 divise $u_5 =$ 8050 donc 7 appartient à E

1,5 points