Exercice 1 10 points

Partie A

- 1) $4 \equiv 1[3]$ donc $4^n \equiv 1^n[3] \equiv 1[3]$ 1 point
- 2) $4^2 \equiv 3[13]$ donc $4^3 \equiv -1[13]$ et $4^6 \equiv 1[13]$ et aussi $4^{12} \equiv 1[13]$ 1,5 points
- 3) $4 \equiv 4[17]$, $4^2 \equiv 16[17]$ donc $4^2 \equiv -1[17]$, et $4^3 \equiv -4 \equiv 13[17]$, $4^4 \equiv 1[17]$

Le reste de 4 est 4, celui de 4^2 est 16, celui de 4^3 est 13 et celui de 4^4 est 1 1 point

$$4^{4k} - 1 \equiv (4^4)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0[17] \quad 1,5 \text{ points}$$

- 4) $4^2 \equiv 1[5]$ donc $4^{2k} - 1$ divisible par 5 : n doit donc être pair 1 point
- 5) 12 pair donc 5 divise $4^{12} - 1$ par la question 4) ; 12 est divisible par 4 donc par la question 3, 17 divise $4^{12} - 1$; par la question 1), 3 divise $4^{12} - 1$. Et enfin, 13 est un diviseur de $4^{12} - 1$ par la question 2. 1 point

Partie B

a) On a $n = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ donc :

$$4^n \equiv 1[p] \text{ entraine } 4^{bq+r} \equiv 1[p] \text{ donc } (4^b)^q \times 4^r \equiv 1[p] \text{ donc } 4^r \equiv 1[p]$$

Et puisque b est le plus petit entier naturel non nul tel que $4^n \equiv 1[p]$ et que $r < b$ alors $r = 0$ 1,5 points

b) Supposons $4^n \equiv 1[p]$ alors par la question a), $r = 0$ et donc n est un multiple de b.

Supposons n multiple de b. Alors il existe q entier naturel tel que $n = bq$. Donc

$$4^n = (4^b)^q \equiv 1^q[p] \equiv 1[p] \quad 1,5 \text{ points}$$

Exercice 2 10 points

- 1) Avec la calculatrice : PGCD = 3 1 point
- 2) $u_2 = 5$; $u_3 = 21$; $u_4 = 85$ 1,5 points
- 3) a) On va le prouver par récurrence : initialisation : vrai pour $n = 0$

$$\text{HR : } u_{n+1} = 4u_n + 1$$

$$\text{Alors : } u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n = 5u_{n+1} - u_{n+1} + 1 = 4u_{n+1} + 1$$

Vrai au rang $n + 1$ donc vrai pour tout n 2 points

b) Procédons encore par récurrence : vrai au rang $n = 0$. Supposons u_n entier naturel, alors $4u_n + 1$ est aussi un entier naturel donc u_{n+1} entier naturel. 1 point

c) On a : $u_{n+1} - 4u_n = 1$ donc par le théorème de Bézout, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux et donc $\text{PGCD}(u_n; u_{n+1}) = 1$ 1 point

4) a) On a :

Corrigé DS n° 4 TS spé 731 - 734

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4u_n + \frac{4}{3}}{u_n + \frac{1}{3}} = 4$$

Donc la suite v est géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$ *1 point*

b) On a : *1 point*

$$v_n = \frac{1}{3} \times 4^n$$

$$u_n = \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

c) On a *1,5 points*

$PGCD(u_n; u_{n+1}) = 1$ par la question 3 et $PGCD(u_n; u_{n+1}) = \frac{1}{3} PGCD(4^n - 1; 4^{n+1} - 1)$

Donc : $PGCD(4^n - 1; 4^{n+1} - 1) = 3$