

Corrigé DS n° 5 spé

Exercice 1 7 points

1) On a : $z' = x' + iy' = -x - y + 2 + i(x - y - 1) = -x - iy + i(x + iy) + 2 - i = -z + iz + 2 - i = (-1 + i)z + 2 - i$ 1 point

2) Puisque l'écriture complexe de s est de la forme $z' = az + b$ alors s est une similitude directe . 0,25 point

rapport = $|-1 + i| = \sqrt{2}$; angle = $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ 0,5 + 0,5 point

centre : $z = (-1 + i)z + 2 - i \Leftrightarrow (2 - i)z = 2 - i \Leftrightarrow z = 1$ donc Id'afixe 1 0,75 point

3) a) $z'' = (-1 + i)z' + 2 - i = (-1 + i)[(-1 + i)z + 2 - i] + 2 - i = -2iz + 3i$ 1 point

et l'isobarycentre de M , M' et M'' a pour affixe : 1 point

$$\frac{z + z' + z''}{3} = \frac{z + (-1 + i)z + 2 - i - 2iz + 3i}{3} = \frac{-iz + 2 + 2i}{3}$$

b) Puisque g a une écriture de la forme $g(z) = az + b$ alors g est une similitude directe .

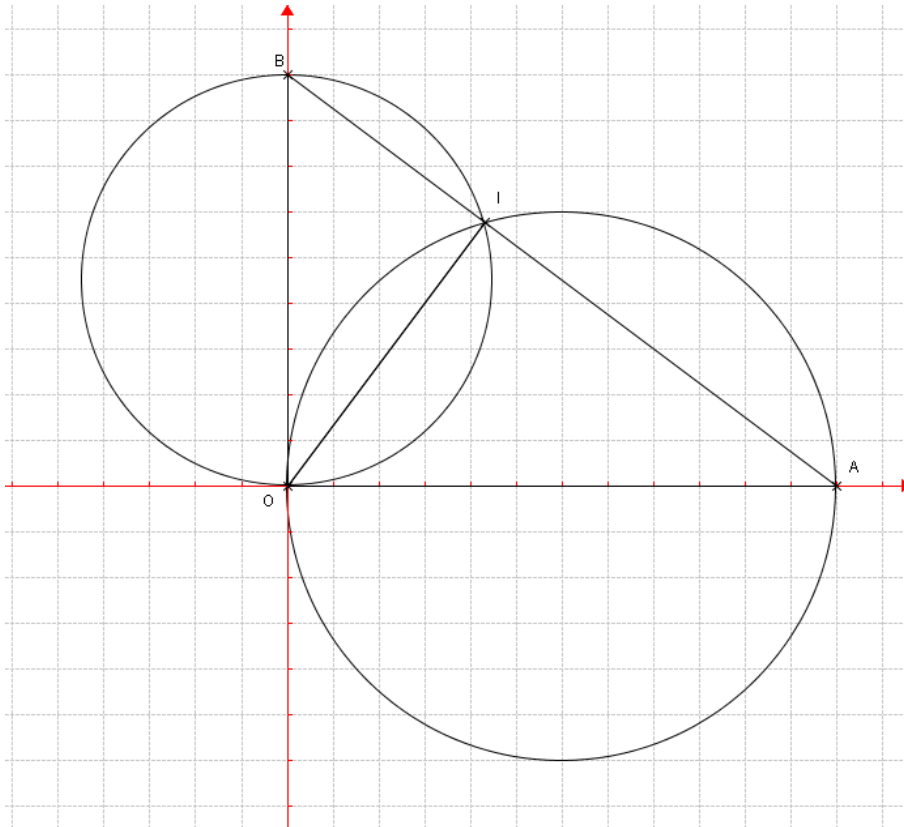
$z = \frac{-iz + 2 + 2i}{3} \Leftrightarrow (3 + i)z = 2 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{(2 + 2i)(3 - i)}{10} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$: affixe du centre 1 point

c) N a pour affixe z telle que : 1 point

$$\frac{-iz + 2 + 2i}{3} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 + 2i}{i} = 2 - 2i$$

Exercice 2 7 points

1) Figure 1 point



2) Rapport : $3/4$; angle = $\arg(-i) = -\pi/2$; centre I : $z = \frac{36i}{4 + 3i} = \frac{108}{25} + i\frac{144}{25}$ 2 points

3) Image de O : B ; image de A : O 2 points

Corrigé DS n° 5 spé

- 4) Puisque $f(O) = B$ alors IOB est rectangle en I et donc I est sur le cercle de diamètre [OB] . Même raisonnement pour l'autre cercle . **1 point**
- 5) (IO) perpendiculaire à (IB) et (IO) perpendiculaire à (IA) donc I , A et B alignés et (IO) perpendiculaire à (AB) : I est donc le pied de la hauteur issue de O dans OAB .
1 point

Exercice 3

6 points

- 1) On a :

$$|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4 \Leftrightarrow |(1 - i\sqrt{3})| \left| z - \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i\sqrt{3}} \right| = 4 \Leftrightarrow 2|z - i| = 4 \Leftrightarrow |z - i| = 2$$

AM = 2 : c'est donc le cercle de centre A et de rayon 2 **1 point**

- 2) On doit résoudre : **2 points**

$$\begin{cases} 0 = ai + b \\ -4i = a\sqrt{3} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -ia = -\sqrt{3} - i \\ a = \frac{4i}{-\sqrt{3} + i} = i(-\sqrt{3} - i) = 1 - \sqrt{3}i \end{cases} \Leftrightarrow z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$$

- 3) Rapport : 2 ; angle $-\frac{\pi}{3}$; centre : $i\sqrt{3}z = -\sqrt{3} - i$ donc $z = -\frac{\sqrt{3}}{3} + i$ **2 points**
- 4) On cherche M tel que M' vérifie OM' = 4 donc M' est sur le cercle de centre O et de rayon 4 . Or l'image de A est O et le rapport de la similitude est 2 donc M est sur le cercle de centre A et de rayon $4/2 = 2$. **1 point**