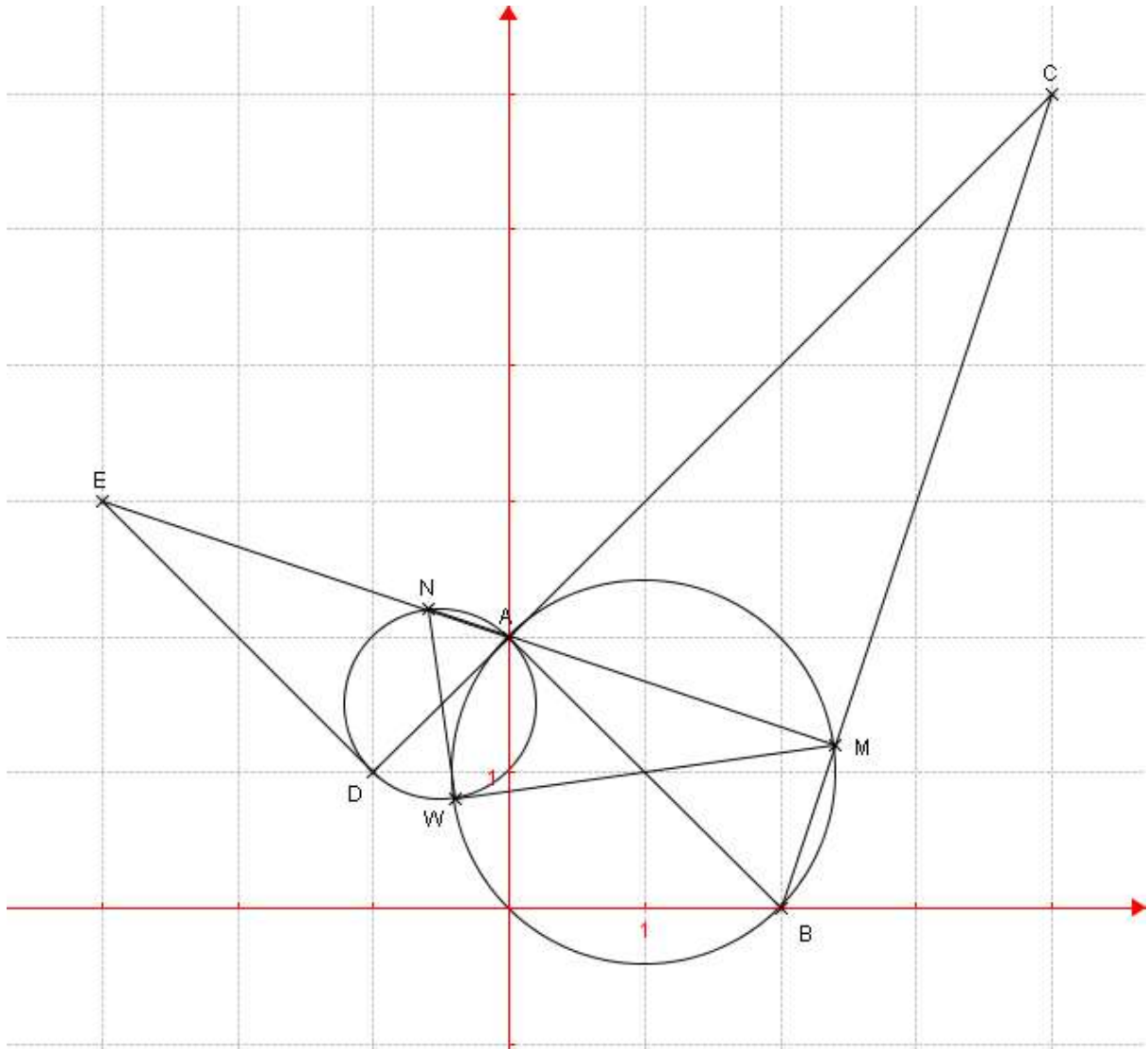


Exercice 1 15 points

1) Figure 1,5 points



2) On a : $AB = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$; $AC = |4 + 4i| = 4\sqrt{2}$ et $BC = |2 + 6i| = 4\sqrt{10}$. Par le réciproque de Pythagore , puisque $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est rectangle en A

1,5 points

3) a) 2 points : L'écriture de f est de la forme $z' = m z + n$

$$\begin{cases} -1 + i = 2im + n \\ 2i = 2m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2i = 2m + n \\ (2 - 2i)m = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{(1+i)^2}{4} = \frac{i}{2} \\ n = 2i - i = i \end{cases} \Leftrightarrow z' = \frac{i}{2}z + i$$

b) 2 points : On a :

$$\text{angle} = \arg\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \text{rapport} = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Corrigé DS n° 6 spé

$$\omega = \frac{i}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{2i(2 + i)}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

c) **1,5 points** : On sait déjà que $f(A) = D$ et $f(B) = A$. Déterminons l'image de C :

$$z' = \frac{i}{2}(4 + 6i) + i = 3i - 3 = e$$

L'image de C est donc E et donc l'image de ABC est DAE

d) Puisque ABC est un triangle rectangle et comme la similitude conserve les angles, alors DAE est un triangle rectangle **1,5 points**

4) a) On sait que l'image de [AB], c'est [DA]. Donc le cercle de diamètre [AB] a pour image le cercle de diamètre [DA] : l'image de Γ_1 est Γ_2 .

De plus, l'image de (BC) est (AE)

Comme M est sur Γ_1 et sur (BC) alors son image est sur Γ_2 et sur (AE), c'est donc N **2 points**

b) On a

$$(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega N}) = \text{angle}(f) = \frac{\pi}{2}$$

Donc ΩMN est un triangle rectangle en Ω **1,5 points**

c) **1,5 points** : On sait que le rapport de f est $\frac{1}{2}$ donc en utilisant $f(B) = A$, $f(M) = N$, et $f(C) = E$

$$\frac{NA}{MB} = \frac{1}{2} = \frac{NE}{MC} \text{ donc } NA \times MC = MB \times NE$$

Exercice 2 **5 points**

1) Solution particulière : $(u, v) = (2; 3)$

$$5x - 3y = 1 = 5u - 3v \text{ donc } 5(x - u) = 3(y - v)$$

5 divise donc $3(y - v)$ mais puisque 3 et 5 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, 5 divise $y - v$ et il existe k entier relatif tel que $y - v = 5k$ c'est-à-dire $y = 3 + 5k$.

On remplace : $5(x - u) = 3(5k)$ donc $x - u = 3k$ et donc $x = 2 + 3k$

Réciproquement : $5(2 + 3k) - 3(3 + 5k) = 1$

Les solutions sont donc les couples $(2 + 3k; 3 + 5k)$ avec k entier relatif **1,5 points**

Corrigé DS n° 6 spé

- 2) $\begin{cases} N \equiv 2[3] \\ N \equiv 1[5] \end{cases}$ est équivalent à $N = 2 + 3y = 1 + 5x$ c'est-à-dire $5x - 3y = 1$ et par la question 1), $x = 2 + 3k$ et $y = 3 + 5k$.

$$N = 2 + 3(3 + 5k) = 11 + 15k \equiv 11[15]$$

Réciproquement : $N \equiv 11[15]$ équivalent à $N = 11 + 15k$ donc $N \equiv 2[3]$ et $N \equiv 1[5]$

1,5 points

- 3) Oui, $n = 4$ par le théorème de Fermat car 5 est premier, et 12 est premier avec 5

1 point

- 4) Par la question 2), cela revient à $\begin{cases} 12^n \equiv 2[3] \\ 12^n \equiv 1[5] \end{cases}$. Or $12 \equiv 0[3]$ donc c'est impossible.

1 point