DS n° 2 TS 731 et 734 14 / 11 / 2011
Mathématiques spécialité

Exercice 1 ***(7 points)***

On considère la suite d'entiers naturels (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 10u_n + 21$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3
2) Démontrer par récurrence que pour tout n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$
3) Montrer que u_2 est un nombre premier
4) Démontrer que pour tout n , u_n n'est pas divisible par :
   a) 2
   b) 3
   c) 5
5) Montrer que pour tout entier naturel n , $3u_n \equiv 4 - (-1)^n$ [11]

Exercice 2 ***(6 points)***

1) Donner en fonction de n le reste de 2^n dans la division euclidienne par 5
2) Donner en fonction de n le reste de 5^n dans la division euclidienne par 7
3) Donner en fonction de n le reste de 2^n dans la division euclidienne par 7
4) Déduire des questions précédentes , sans effectuer le calcul , le reste dans la division euclidienne par 5 de 12^{1527}
5) Déterminer , sans effectuer le calcul , le reste dans la division euclidienne par 7 de $19^{52} \times 23^{41}$

Exercice 3 ***(7 points)***

On considère la suite d'entiers naturels (u_n) définie par : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) Calculer les six premiers termes de la suite
2) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n est pair
3) Montrer que pour tout entier naturel pair non nul , u_n est divisible par 4
4) On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n) . Les entiers 2 , 3 , 4 , 5 et 7 appartiennent-ils à E ?