Corrigé DM n° 11

Sujet E page 158

Partie A

$$1)\ f_1'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{1-x}{e^x+x}$$

Sur]0; +∞[, f ’(x) est du signe de son numérateur : 1 – x

x	0		1		+∞
f ’(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	ln(e+1) – 1	↘	0

$$2)\ ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right) = ln\left(\frac{x+e^x}{e^x}\right) = ln(x+e^x) - lne^x = ln(x+e^x) - x = f_1(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0\ par\ cc\ donc\ \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$$

Partie B

$$1)\ f_k'(x) = \frac{e^x+k}{e^x+kx} - 1 = \frac{k(1-x)}{e^x+kx}$$

x	0		1		+∞
f ’(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	$ln\left(1+\frac{k}{e}\right)$	↘	0

$$2)\ ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right) = ln(e^x+kx) - lne^x = f_k(x)\ et\ idem\ A2)\ \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$$

$$3)\ b)\ Etudions\ g(x) = ln(1+x) - x\ .\ g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$$

De plus , g(0) = 0 donc g(x) < 0 et ln(1 + x) < x .

Le maximum de $f_k(x)$ est $ln\left(1+\frac{k}{e}\right)$ donc :

$$f_k(x) \leq ln\left(1+\frac{k}{e}\right) \leq \frac{k}{e}$$

$$4)\ f_p(x) - f_m(x) = ln(e^x+px) - x - ln(e^x+mx) + x = ln\left(\frac{e^x+px}{e^x+mx}\right)$$

$$p < m\ donc\ px < mx\ et\ e^x+px < e^x+mx\ donc\ \frac{e^x+px}{e^x+mx} < 1\ et\ ln\left(\frac{e^x+px}{e^x+mx}\right) < 0$$

C_p est donc en dessous de C_m

Poly exercice 6

Partie A

1) réponse c 2) pour n = 10 : u = 0, 6687 ; n = 100 , u = 0,6906 ; n = 1000 , u = 0,6929

Or ln 2 = 0,6931 donc plus n est grand , plus on se rapproche de ln 2

Partie B

$$1)\ f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}\ ;\ g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

x	0		1		+∞
f ’(x)		+	0	-	
f(x)		↗	0	↘	

Donc f(x) < 0 et lnx < x – 1

x	0		1		$+\infty$
g '(x)		-	0	+	
g(x)	$\searrow$		0	$\nearrow$	

$$g(x) > 0\ donc\ lnx > 1 - \frac{1}{x}$$

$$2)\ 1 - \frac{k}{k+1} \le ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \le \frac{k+1}{k} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \le ln(k+1) - lnk \le \frac{1}{k}$$

$$3)\ \frac{1}{n+1} \le ln(n+1) - lnn \le \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+2} \le ln(n+2) - ln(n+1) \le \frac{1}{n+1}$$

…

$$\frac{1}{2n} \le ln2n - ln(2n-1) \le \frac{1}{2n-1}$$

On additionne tout :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \le ln(2n) - lnn \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$4)a)\ 3) \Leftrightarrow u_n \le ln(2n) - lnn \le \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{2n} \Leftrightarrow u_n \le ln(2) \le u_n + \frac{1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2n} \le u_n - ln2 \le 0$$

Par le th des gendarmes , on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0\ et\ \lim_{n\to+\infty} u_n - ln2 = 0\ donc\ \lim_{n\to+\infty} u_n = ln2$$