Corrigé DM n° 17

Exercice 157 page 195

$$1)\ f'(x)=\frac{1}{cos^2x}$$

$$b)\ I=\left[\frac{sinx}{cosx}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$$

$$2)\ a)\ g'(x)=\frac{cosxcos^3x+3cos^2xsin^2x}{cos^6x}=\frac{1}{cos^2x}+\frac{3sin^2x}{cos^4x}=\frac{1}{cos^2x}+\frac{3(1-cos^2x)}{cos^4x}=-\frac{2}{cos^2x}+\frac{3}{cos^4x}$$

$$b)\ J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}g'(x)dx+\frac{2}{3}I=\frac{1}{3}(g\left(\frac{\pi}{4}\right)-g(0))+\frac{2}{3}I=\frac{2}{3}(1+I)$$

$$c)\ J=\frac{2}{3}(2)=\frac{4}{3}$$

Exercice 160 page 195

$$1)\ g(x)=ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\ ;\ g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=\frac{1+x-1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}$$

Puisque x > 0 , g'(x) > 0 donc g croissante . g(0) = 0 donc g(x) ≥ 0 d'où l'inégalité

$$2)\ a)\ f'(x)=-e^{-x}ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}=e^{-x}\left(\frac{e^x}{1+e^x}-ln(1+e^x)\right)<0\ par\ 1$$

b) La fonction f est donc décroissante

$$c)\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=0\ par\ cc\ ;\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=1\ par\ comportement\ \text{à}\ l'origine$$

La courbe de f admet deux asymptotes horizontales d'équation y = 0 et y = 1

$$3)\ a)\ 1-f'(x)-\frac{e^x}{1+e^x}=1+e^{-x}ln(1+e^x)-\frac{1}{1+e^x}-\frac{e^x}{1+e^x}=e^{-x}ln(1+e^x)+\frac{1+e^x-1-e^x}{1+e^x}$$
$$=f(x)$$

$$b)\ F(x)=x-f(x)-ln(1+e^x)$$

$$4)\ \int_0^1 f(x)dx=[x-f(x)-ln(1+e^x)]_0^1=1-e^{-1}ln(1+e)-ln(1+e)+2ln2$$

Exercice 163 page 195

Etudions déjà cette courbe

$$y=\pm\sqrt{\frac{x^2(4-x^2)}{4}}=\pm\frac{|x|}{2}\sqrt{4-x^2}$$

$$\sqrt{4-x^2}existe\ \Leftrightarrow x\in[-2;2]$$

Nous travaillons donc sur [-2 ;2]

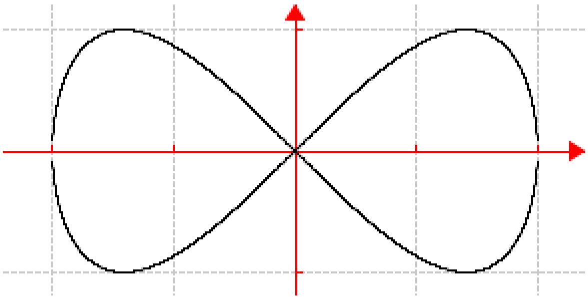
$$Soit\ f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\ d\acute{e}finie\ sur\ [0;2]$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{x}{2}\times\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	0		$\sqrt{2}$		2
f '(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	1	↘	0

On sait que $|x|=x\ si\ x>\ 0\ et\ -x\ si\ x\ <\ 0\ donc\ si\ g(x)=\frac{|x|}{2}\sqrt{4-x^2}\ alors\ g(x)=f(x)\ si\ x>$ $0\ et\ g(x)=-f(x)\ si\ x<0$

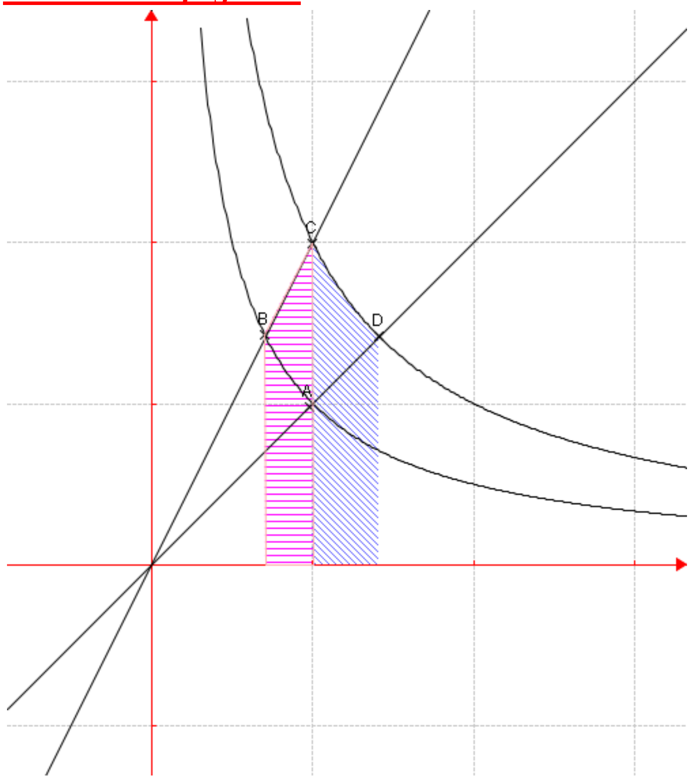
Or f(-x) = - f(x) .
On a donc g(a) = f(a) pour a > 0 et g(-a) = -f(-a) = f(-(-a)) = f(a)
Donc la courbe de g est obtenue avec celle de f puis la symétrique de f par rapport à l'axe des ordonnées .
La courbe finale est obtenue par symétrie de la courbe de g par rapport à l'axe des abscisses .
D'où la courbe :



L'aire totale est donc :

$$4\int_0^2 f(x)dx = \left[-\frac{1}{6}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

<u>Exercice 164 page 195</u>



Commençons par trouver les coordonnées de A , B , C et D

$$\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1\ car\ x > 0\ donc\ A(1;1)$$

$$2x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ donc\ B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{2}{x} = 2x \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow C(1;2)$$

$$\frac{2}{x} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\ donc\ D(\sqrt{2};\sqrt{2})$$

Soit A1 l'aire bleue

$$A_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{x}dx = [2lnx]_1^{\sqrt{2}} = ln2$$

Et on peut trouver l'aire bleue comprise dans le quadrilatère curviligne A2

$$A_2 = ln2 - \int_1^{\sqrt{2}} xdx = ln2 - 1 + \frac{1}{2} = ln2 - \frac{1}{2}$$

Soit maintenant A3 l'aire rose comprise dans ABCD . Par le même raisonnement , on a :

$$A_3 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 2x - \frac{1}{x}dx = [x^2 - lnx]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln2 - ln2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$$

On ajoute alors A2 et A3

$$Aire\ = \frac{ln2}{2}$$