Corrigé DM n° 5

Groupe A : Sujet A page 69

Partie A

1) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-2+\frac{9}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=-\infty$$

2) $g'(x)=-6x^2+18x-10$; $\Delta = 84$

x	0		$\frac{9-\sqrt{21}}{6}$		$\frac{9+\sqrt{21}}{6}$		$+\infty$
g '(x)		-	0	+	0	-	
g(x)	4	↘	0,72	↗	4,28	↘	$-\infty$

3) Cf ci-dessus

4) Par CTVI et lecture du tableau de variations , il existe une unique solution de g(x) = 0

3,09 < a < 3,10

5) Signe de g :

x		a	
g(x)	+	0	-

Partie B

1) $A'(x)=-4x^3+18x^2-20x+8=2g(x)$

2) Variations de A :

x	0		a		$+\infty$
A'(x)		+	0	-	
A(x)	8	↗	A(a)	↘	

Partie C

1) Calculons l'aire de OPMQ en fonction de x :

$$Aire(x)=xf(x)=A(x)$$

Par la partie B , A est donc maximale quand x = a

2) Donnons le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse a

$$f'(a)=-3a^2+12a-10$$

Donnons le coefficient directeur de (PQ) :

$$m=\frac{f(a)}{-a}=-\frac{f(a)}{a}$$

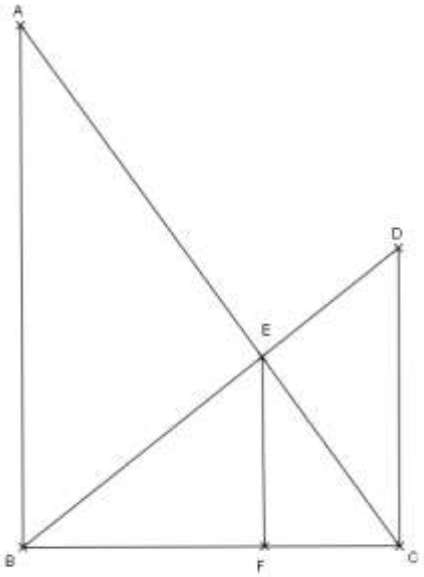
Or nous savons que g(a) = 0 et A'(a) = 2 g(a) = 0 . Puis A(a) = a f(a)

Or $A'(x)=f(x)+xf'(x)\ donc\ A'(a)=f(a)+af'(a)=0$

$$-\frac{f(a)}{a}=f'(a)$$

Les deux droites ont le même coefficient directeur et sont donc parallèles

Groupe B :Exercice 152 page 101



On a : BC = x , EF = 1 , BD = 2 et AC = 3

De plus , $0 < x < 2$

Par Pythagore , on obtient : $DC^2 = 4 - x^2$ et $AB^2 = 9 - x^2$

$$DC = \sqrt{4 - x^2}\ ;\ AB = \sqrt{9 - x^2}$$

Utilisons maintenant Thalès

$$\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{CD}\ donc\ \frac{BF}{x} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\ donc\ BF = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\frac{CF}{BC} = \frac{EF}{AB}\ donc\ \frac{x - BF}{x} = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\ donc\ BF$$

$$= x - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

On a donc l'égalité :

$$\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = x - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\ c'est\ à\ dire\ \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} + \frac{x}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}} > 0$$

x	0	2
f '(x)	+	
f(x)	5/6 ↗	$+\infty$

La fonction f est continue strictement croissante et 1 appartient à l'intervalle image donc par le CTVI , f(x) = 1 admet une unique solution : $1,2 < a < 1,3$