Corrigé DM n° 7

Exercice 173 page 131

Partie A

1) $g'(x) = e^x + 1 > 0\ donc\ g\ croissante$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\ ;\ \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

2) La fonction g est continue , strictement croissante , 0 appartient à l'intervalle image donc par le CTVI , il existe un unique a tel que g(a) = 0 : -1,28 < a < -1,27

3) Signe de g :

x		a	
g(x)	-	0	+

Partie B

$$1)\ f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x+1) - e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x + xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 + x)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f '(x)		-		+	
f(x)		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	

$$2)\ g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a = -a - 1\ donc\ f(a) = \frac{a(-a-1)}{-a-1+1} = a + 1$$

-0,28 < f(a) < -0,27

$$3)\ y = \frac{1}{2}x$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{xe^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}x = \frac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$$

$e^x > 0\ \forall x \in\ \mathbb{R}$ donc l'expression est du signe de $x(e^x - 1)$

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$donc\ f(x) - \frac{1}{2}x > 0\ pour\ tout\ x$$

Conclusion : la courbe est au dessus de sa tangente

$$4)\ \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0\ par\ cc\ donc\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 0

$$5)\ f(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}}\ donc\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f '(x)		-		+	
f(x)	0	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 175 page 131

$$M(a; 2e^{3a})\ ;\ H(a; 0)$$

$$T : y = 6e^{3a}(x-a) + 2e^{3a} \; donc \; y = 6e^{3a}x - 6ae^{3a} + 2e^{3a}$$

$$P \;:\; 6e^{3a}x - 6ae^{3a} + 2e^{3a} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6a-2}{6} = a - \frac{1}{3} \; donc \; P\left(a - \frac{1}{3} ; 0\right)$$

$$PH^2 = \frac{1}{9} \; donc \; PH = \frac{1}{3}$$

<u>Poly n° 115</u>

$$f(x) = a - ae^{bx}$$

$$(OA) \;:\; y = x \; donc \; f'(0) = 1 \; donc \; -ab = 1$$

La droite d'équation y = 4 est asymptote horizontale à C donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} a(1 - e^{bx}) = 4 \Leftrightarrow a = 4 \; et \; b < 0$$

Conclusion : a = 4 et b = -1/4

<u>Poly n° 3</u>

On doit donc étudier l'équation : $me^{-x} = -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$

$e^x > 0 \; et \; (x-1)^2 \; \geq 0 \; \forall x \in \; \mathbb{R}$ donc m ≤ 0

On peut donc déjà affirmer que si m > 0 , il n'y a pas de solution .

Si m = 0 , il y a une solution : x = 1

Supposons m < 0

$$f(x) = -(x-1)^{2e^x} ; \; f'(x) = -2(x-1)e^x - (x-1)^{2e^x} = e^x(1-x)(1+x)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	0	-	
f (x)	0	↘	-4/e	↗	0	↘	

On doit donc résoudre f(x) = m avec m < 0

Par le CTVI il y a exactement 3 solutions si -4/e < m < 0

2 solutions si m = -4/e

1 solution si m < -4/e