corrigé DS 5 Terminale S 29 février 2016

Exercice 1

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par :

$$\left\{\begin{array}{lll} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. (a) $z_1 = \dfrac{1+i}{2} z_0 = \dfrac{1+i}{2} \times 16 = 8 + 8i$.

   $z_2 = \dfrac{1+i}{2} z_1 = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)(8+8i) = 4 + 4i + 4i - 4 = 8i$.

   $z_3 = \dfrac{1+i}{2} z_2 = 8i\left(\dfrac{1+i}{2}\right) = 4i - 4 = -4 + 4i$.

   (b) Voir l'annexe.

   (c) Si $z = \dfrac{1+i}{2}$ alors $|z|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, donc $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Donc $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

   Un argument de $\dfrac{1+i}{2}$ est donc $\frac{\pi}{4}$.

   (d) $OA_0 = | |z_0| = r_0 = 16$;

   $OA_1 = | |z_1| = r_1 = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$;

   $A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8 + 8i - 16| = |-8 + 8i| = 8\sqrt{2}$.

   On a donc $OA_1 = A_0A_1$: le triangle est isocèle en A_1 ;

   D'autre part $\left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 16^2 \iff A_0A_1^2 + OA_1^2 = OA_0^2$ signifie (réciproque du théorème de Pythagore) que le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1.

2. $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+i}{2} z_n\right| = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| \times |z_n|$ (le module du produit est égal au produit des modules) $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_n$.

   $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_n$ montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   On sait que $r_n r_0 \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 16\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

   Comme $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$.

   La suite converge vers 0.

   Comme $r_n = |z_n| = OA_n$, ceci signifie géométriquement que la limite des points A_n est le point O.

3. (a) *Quel que soit le naturel* n :

$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2}z_n - z_n\right| = \left|z_n\left(\frac{1+i}{2} - 1\right)\right| = \left|z_n\left(\frac{-1+i}{2}\right)\right| = \left|\frac{-1+i}{2}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n = r_{n+1}$.

(b) L_n *est donc la somme des* n *(sauf* r_0*) premiers termes de la suite géométrique* (r_n).

Donc $L_n = 8\sqrt{2}\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

(c) *On sait que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \dfrac{8\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{16}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 16\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Exercice 2
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

1. *On considère la fonction* f_1 *définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :*

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

(a)
- $f_1(0) = 0$ *: évident ;*
- $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$ *;*
- f_1 *fonction polynôme est dérivable sur [0 ; 1] donc continue sur cet intervalle ;*
- $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 3(2x-1)^2 \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *donc sur [0 ; 1] et* f_1 *est croissante sur cet intervalle.*

f_1 *est donc bien une fonction de retouche.*

(b) *Il semble que la courbe coupe la droite d'équation* $y = x$ *pour* $x = 0$ *et* $x = 0,5$.

On peut vérifier que $f_1(0,5) = 0,5$.

On a donc $f_1(x) \leqslant x \iff x \geqslant 0,5$ *o u* $x = 0$.

Ce résultat signifie que f_1 *éclaircit les nuances codées par un nombre supérieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0 (exclu) et 0,5.*

2. (a) f_2 *est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc* g *l'est aussi et :*

$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x} = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$.

(b) *Comme* $\mathrm{e} > 1$, *le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de* $g'(x)$ *est donc celui de son numérateur ; or*

$\mathrm{e} - 2 - (\mathrm{e}-1)x \geqslant 0 \iff \mathrm{e} - 2 \geqslant (\mathrm{e}-1)x \iff \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \geqslant x$

On a $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \approx 0,418$.

On a donc avec $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} = a$,

$g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant a$ *et de même*

$g'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant a$.

La fonction g *est donc croissante sur* $[0\ ;a]$, *puis décroissante sur* $[a\ ;\ 1]$.

g *a donc un maximum* $g(a) \approx 0,12$.

(c) *D'après la question précédente sur l'intervalle* $[0\ ;\ a]$ *la fonction* g *est continue et croissante de* $g(0) = 0$ *à* $g(a) \approx 0,12$.

Comme $0,05 \in [0\ ;\ a]$, *il existe une valeur unique* α *de* $[0\ ;\ a]$ *telle que* $f(\alpha) = 0,05$.

On démontre de même (avec g *décroissante) que sur* $[a\ ;\ 1]$ *il existe un réel unique* β *tel que* $g(\beta) = 0,05$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ *et que :* $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

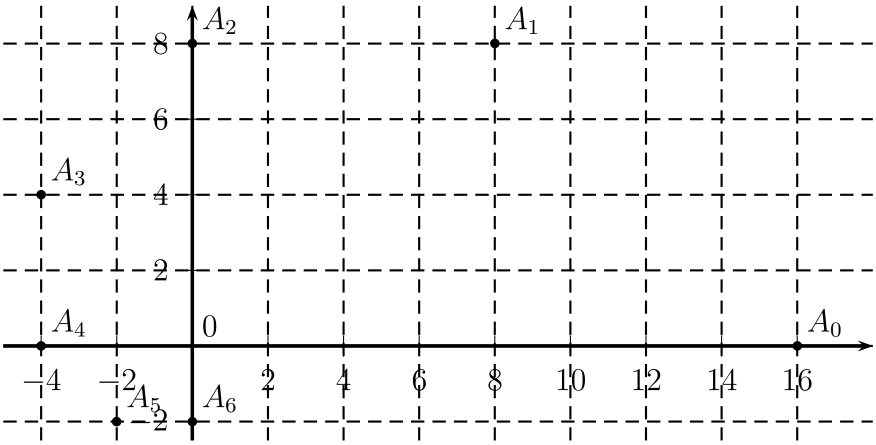
1. *Cet algorithme calcule le nombre de nuances par palier de 0,01 pour lesquelles la modification est perceptible visuellement.*

2. *On applique l'algorithme à la fonction* $g = f_2 - x$. *Il calcule toutes valeurs telles que* $g(x) \geqslant 0,05$.

   Ce sont d'après la question précédente toutes les nuances comprises entre 0,09 et 0,85 : l'algorithme doit donc retourner : $c = 85 - 9 + 1 = 77$.

Annexe à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 2



Annexe relative à l'exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1