109 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3a \end{pmatrix}$ où a est un réel.

Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est inversible ? Lorsque A est inversible, donner son inverse.

59 Une somme de 2050 euros est constituée exclusivement de billets de 100 €, 50 € et 20 €. Il y a en tout 80 billets et chaque type de billet est utilisé. Combien y a-t-il de billets de chaque sorte ?

Sujet C

Capacités mises en œuvre

- *Déterminer une matrice inverse*
- *Résoudre un système à l'aide d'une matrice*
- *Calculer les puissances d'une matrice*

On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $B = 4A - A^2$, puis le produit AB.

2. Déduire de ce qui précède que A est inversible et donner sa matrice inverse.

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$2x - y + 3z = 1,\ \ -3x + y - z = 2 \ \text{ et } \ x + y + z = 3.$$

Déterminer l'intersection de ces trois plans à l'aide de la matrice B.

4. Vérifier que la matrice A^3 s'écrit sous la forme :

$$a_3 I_3 + b_3 A + c_3 A^2,$$

où a_3, b_3 et c_3 sont des réels à déterminer.

5. En déduire que la matrice A^4 s'écrit sous la forme :

$$a_4 I_3 + b_4 A + c_4 A^2,$$

où a_4, b_4 et c_4 sont des réels à déterminer.

6. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la matrice A^n s'écrit sous la forme $a_n I_3 + b_n A + c_n A^2$ où les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont telles que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = -10c_n,\ \ b_{n+1} = a_n \ \text{ et } \ c_{n+1} = b_n + 4c_n.$$

7. Déterminer a_n, b_n et c_n pour $n = 5$ puis pour $n = 6$.

60 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.

Sur le Web
Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TS-spe

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez deux nombres a et b tels que $A = aI + bN$ où I est la matrice unité d'ordre 3 et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

▸ Analyser l'énoncé
La matrice auxiliaire N a l'avantage d'avoir beaucoup de zéros : les calculs avec N seront faciles.

2. a) Calculez les matrices N^2 et N^3.

b) Prouvez que $N^3 = A^3 - 6A^2 + 12A - 8I$.

c) Déduisez-en que la matrice A est inversible puis calculez son inverse A^{-1}.

▸ Analyser l'énoncé
Rappelez-vous la définition : s'il existe une matrice B telle que AB = BA = I, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

3. a) Montrez, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

b) La formule précédente est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 55 ***D'après Bac ES, France métropolitaine, juin 2008***

Deux fabricants de parfums lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité. L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires. Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale.

Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes interrogées préférant Aurore et 15 % des personnes interrogées préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n, on désigne par la matrice colonne $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste la semaine n après le début de la campagne où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n désigne la probabilité qu'une personne choisie au hasard préfère Boréale la semaine n.

1. a. Donner la matrice P_0.

b. Cette situation peut-être assimilée à une marche aléatoire sur un graphe à deux sommets.

Écrire la matrice de transition M entre les états P_n de cette marche aléatoire.

2. a. Calculer P_1 à la main.

b. Exprimer, pour tout n, P_n en fonction de P_0 et n.

c. En déduire P_4 à l'aide de la calculatrice (on donnera des valeurs approchées au centième) et interpréter ce résultat.

3. Écrire en language naturel un algorithme permettant de déterminer si le parfum Aurore sera préféré au parfum Boréale durant une des 10 premières semaines suivant le début de cette campagne.

4. Le fabricant de parfum qui a lancé la campagne estime qu'en fait chaque semaine seuls 80 % des consommateurs voient leur comportement influencé comme décrit ci-dessus par la publicité. Les 20 % restant choisissent de façon équiprobable un des deux parfums.

On désigne à nouveau par la matrice colonne P_n l'état probabiliste la *n-ième* semaine après le début de la campagne.

a. Établir, pour tout $n \geqslant 0$, une relation entre P_{n+1} et P_n faisant intervenir la matrice M et la matrice colonne $N = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

b. Si les conditions initiales sont celles du début de l'énoncé, déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'état probabiliste des choix de parfums après 4 semaines de publicité (arrondir les résultats au centième).

hmique 2 Calcul de l'inverse d'une matrice

On propose de faire tester l'algorithme de Gauss-Jordan, permettant de calculer l'inverse d'une matrice.

1 On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 \\ -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer son inverse (s'il existe) à l'aide d'un logiciel de calcul formel ou d'une calculatrice.

2 Pour déterminer algorithmiquement M^{-1}, on va considérer la matrice augmentée suivante :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

a. Diviser la ligne L_1 par le coefficient a_{11}.

b. Remplacer la ligne L_2 par $L_2 - a_{21}L_1$.

c. Remplacer la ligne L_3 par $L_3 - \ldots L_1$ et vérifier que l'on obtient bien la matrice suivante :

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 23 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

3 On recommence le procédé avec la ligne L_2.

a. Diviser la ligne L_2 par le coefficient …

b. Remplacer la ligne L_1 par $L_1 - \ldots L_2$ et la ligne L_3 par $L_3 - \ldots L_2$.

4 Recommencer le procédé avec la ligne L_3. On obtient alors dans la partie gauche la matrice identité et dans la partie droite la matrice inverse de M.