corrigé Bac blanc Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **7 points**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$: on a $g'(x) = 2xe^x + x^2\mathrm{e}^x \geqslant 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ (car tous les termes sont positifs.

La fonction g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ (car la dérivée ne s'annule qu'en 0).

b. $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = e - 1 > 0$. Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	↗	0	↗	$\mathrm{e}-1$	↗	

La fonction g est continue car dérivable , strictement croissante sur $[0;+\infty[$, et 0 appartient à l'intervalle image donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;+\infty]$; on appelle a cette solution.

$g(0,703) \approx -0,0018 < 0$ et $g(0,704) \approx 0,002 > 0$ donc $a \in [0,703;0,704]$.

c. D'après le tableau de variations de g :
- $g(x) < 0$ sur $[0;a[$
- $g(x) > 0$ sur $]a;+\infty[$

2. Étude de la fonction f

a.

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to 0} e^x = 1\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} e^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} e^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

c. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

d. D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.

$f(a) = e^a + \dfrac{1}{a}$. Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc

$g(a) = 0 \iff a^2e^a - 1 = 0 \iff a^2e^a = 1 \iff e^a = \dfrac{1}{a^2}$.

On en déduit que $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ et on a donc démontré que la fonction f admettait pour minimum sur $]0\,;\,+\infty[$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e. On a successivement(en valeurs approchées) :

D'une part :

$$0,703 < a < 0,704$$
$$0,4942 < a^2 < 0,4957$$
$$\frac{1}{0,4957} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,4942}$$
$$2,017 < \frac{1}{a^2} < 2,024$$

D'autre part :

$$0,703 < a < 0,704$$
$$\frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}$$
$$1,420 < \frac{1}{a} < 1,423$$

donc par somme : $2,017 + 1,420 < \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a} < 2,024 + 1,423$ et donc :

$3,43 < m < 3,45$

3. Etude de tangentes

a. L'équation de la tangente au point d'abscisse b est $y = \dfrac{b^2e^b - 1}{b^2}(x-b) + e^b + \dfrac{1}{b} \iff$

$y = \dfrac{b^2e^b - 1}{b^2}x + \dfrac{2}{b} - be^b + e^b$.

H est sur T si et seulement si $2 = \dfrac{2}{b} - be^b + e^b \iff 2(\dfrac{1}{b} - 1) + e^b(1-b) = 0 \iff$

$(1-b)(\dfrac{2}{b} + e^b) = 0$

b. On doit résoudre l'équation précédente . Puisque b est un réel strictement positif , $e^b + \dfrac{2}{b} > 0$ donc $b = 1$. Il existe donc une seule tangente passant par H , celle au point d'abscisse 1 .

EXERCICE 2 **5 points**

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

PARTIE A

État des variables :

K	W	U	V
0	—	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

PARTIE B

1. **a.** Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}$$
$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8(\dfrac{5}{12})^n$.

2. **a.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n}{3} = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \dfrac{v_n - u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8(\dfrac{5}{12})^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{4v_n}{4} = \dfrac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4}$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

Donc la suite (v_n) est décroissante.

b. On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à-dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \implies u_n \leqslant 10$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \implies v_n \geqslant 2$.

c. La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ_u.

La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ_v.

3. La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v - \ell_u$.

Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.

La limite d'une suite est unique donc $\ell_v - \ell_u = 0$ et donc $\ell_v = \ell_u$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite qu'on appelle ℓ.

4. $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \dfrac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$

$= 3u_n + 4v_n = t_n$ donc la suite (t_n) est constante.

$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$

Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers m donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3m + 4m = 7m$.

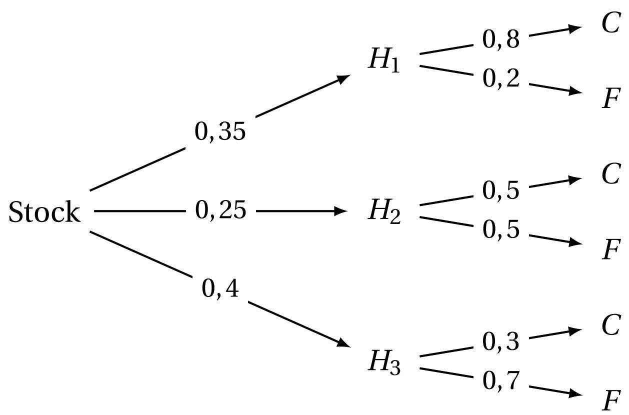
La limite d'une suite est unique donc $7m = 46 \iff m = \dfrac{46}{7}$.

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\dfrac{46}{7}$.

EXERCICE 3 **3 points**

Puisque le choix de l'arbre se fait au hasard dans le stock de la jardinerie, on assimile les proportions données à des probabilités.

1. **a.** L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



b. On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc : $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$. On a donc $P(H_3 \cap C) = 0,12$.

c. Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :

$P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) =$

$0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525.$

d. On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :

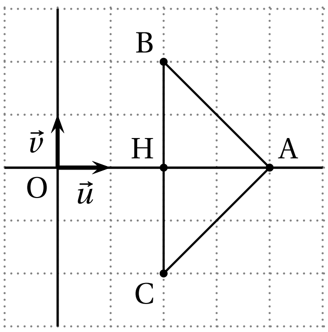
$P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533.$

2. Soit l'événement l'arbre n'est pas feuillu . La probabilité qu'aucun arbre ne soit feuillu est donc :$0,525^{10}$ donc la probabilité qu'au moins un arbre soit feuillu est $1-0,525^{10} = 0,9984$

EXERCICE 4 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1. $(1+i)^{4n} = ((1+i)^4)^n$ et $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2$
$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$; donc $(1+i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$
Donc $(1+i)^{4n} = (-4)^n$; **la proposition est vraie.**
2. On cherche les solutions de l'équation (E) : $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$.
Il y a $z = 4$ qui annule $z-4$.
Pour $z^2-4z+8 = 0$: $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times8 = 16-32 = -16 < 0$
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-(-4)+i\sqrt{16}}{2} = \dfrac{4+4i}{2} = 2+2i$ et $z_2 = 2-2i$
L'équation (E) admet pour solutions $\{4,\ 2+2i,\ 2-2i\}$.
Représentons les points dont les affixes sont solutions de (E) :



Le triangle ABC est isocèle en A car les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$ et A appartient à cet axe ; donc le milieu H de [BC] est aussi le pied de la hauteur issue de A dans le triangle.
H a pour affixe 2 donc AH=2 ; de plus BC = $|2+2\imath-2+2\imath| = |4\imath| = 4$.
L'aire de ce triangle vaut donc :
$\dfrac{BC\times AH}{2} = \dfrac{4\times2}{2} = 4$

La proposition est fausse.

3. $(-1+i)^{10} = (-2i)^5 = -32i$ qui est bien un nombre imaginaire pur donc le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est situé sur l'axe des imaginaires .
La proposition est vraie.
4. Posons $z = x+iy$ avec x et y réels , alors l'équation est équivalente à : $x+iy-x+iy+2-4i = 0 \iff 2iy = -2+4i \iff y = 2+i$. Mais y est réel donc il n'y a pas de solution .
La proposition est fausse.
5. Le nombre j a pour module 1 et argument $\dfrac{2\pi}{3}$ donc j^2 a pour module $1^2 = 1$ et pour argument $2\times\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.
On a : j $= cos\dfrac{2\pi}{3} + \imath sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
D'où : $1+j+j^2 = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 0$
La proposition est vraie.

EXERCICE SPÉ **5 points**

Partie A

1. $(n+2)(2n+2)+n+17 = 2n^2+7n+21$. Vérifions maintenant que le reste est bien inférieur à b : $n+7 < 2n+2 \iff n > 5$. Le reste est donc bien $n+7$ pour n entier naturel strictement supérieur à 5 .

   Si $n = 0$, le reste de 21 dans la division euclidienne par 2 est 1 et non 17 . **La proposition est fausse .**

2. $11 \equiv 4[7]$. Etudions les puissances de 4 modulo 7 .

   $4^2 \equiv 2[7]; 4^3 \equiv 1[7]$ donc $(4^3)^k \equiv 1[7]$ et $4^{3k+1} \equiv 4[7]$; $4^{3k+2} \equiv 2[7]$.

   $2011 = 3 \times 670 + 1$ donc $11^{2011 \equiv 4^{3k+1}} \equiv 4[7]$

   La proposition est vraie.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

1. En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH » ; on veut crypter le mot « ESPION ».

   Les lettres ES correspondent à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+72 \\ 28+54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix}$

   $\left.\begin{array}{l} 108 = 4 \times 26 + 4 \text{ donc } 108 \equiv 4 \text{ modulo } 26 \\ 82 = 3 \times 26 + 4 \text{ donc } 82 \equiv 4 \text{ modulo } 26 \end{array}\right\}$ donc $\begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ modulo 26 ce qui correspond à EE.

   Le mot ESPION se code donc en EELZWH.

2. **Méthode de décryptage**

   a. $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 9 \times 3 - 4 \times 7 = -1 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

   On trouve son inverse à la calculatrice : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$

   b. Au cryptage, une matrice colonne X correspondant à deux lettres, est d'abord transformée en la matrice Y telle que $AX = Y$. Puis on cherche la matrice Y' composée de nombres entiers entre 0 et 25 et telle que $Y' \equiv Y$ modulo 26.

   Au décryptage, on cherche la matrice colonne Y correspondant aux deux lettres à décrypter. Puis on détermine la matrice X telle que $AX = Y$, autrement dit telle que $X = A^{-1}Y$. Enfin on détermine la matrice colonne X' composée des restes des éléments de X modulo 26.

   Comme $X \equiv X'$ modulo 26, d'après le texte $AX \equiv AX'$ modulo 26 et donc AX et AX' correspondent à la même matrice colonne Y modulo 26 ; ce qui valide le processus de décryptage.

Pour décrypter les lettres XQ, on cherche la matrice colonne correspondant à ces deux lettres : $\begin{pmatrix}23\\16\end{pmatrix}$ puis on multiplie à gauche par la matrice A^{-1}

$\begin{pmatrix}-3 & 4\\7 & -9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}23\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\times 23+4\times 16\\7\times 23-9\times 16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\17\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}21\\17\end{pmatrix}$ modulo 26 ce qui correspond à VR.

On fait de même avec GY représenté par $\begin{pmatrix}6\\24\end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix}-3 & 4\\7 & -9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\times 6+4\times 24\\7\times 6-9\times 24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}78\\-174\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ modulo 26 ce qui correspond à AI.

Le mot XQGY se décode en VRAI.