BAC BLANC Terminale S

Mai 2018
Corrigé Epreuve de Mathématiques Obligatoire
Coefficient 7
Durée 4 Heures

EXERCICE 1 **6 points**

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

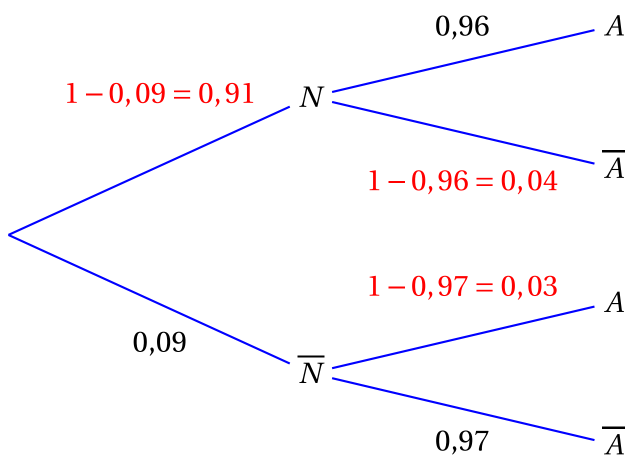
- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. On construit un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment :



2. La probabilité qu'une peluche soit acceptée est $P(A)$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A)$.

$\left.\begin{array}{l} P(N \cap A) = P(N) \times P_N(A) = 0,91 \times 0,96 = 0{,}8736 \\ P\left(\overline{N} \cap A\right) = P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) = 0,09 \times 0,03 = 0{,}0027 \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A) = 0{,}8736 + 0{,}0027 =$ $0{,}8763$

3. La probabilité qu'une peluche qui a été acceptée soit aux normes est $P_A(N)$:

$P_A(N) = \dfrac{P(N \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}8736}{0{,}8763} \approx 0{,}9969$

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur. On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$.

   Si D suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(D \leqslant a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \lambda e^{-\lambda t} dt =$ $1 - e^{-\lambda a}$.

   Donc $P(D \leqslant 4) = 0,5 \iff 1 - e^{-4\lambda} = 0,5 \iff 0,5 = e^{-4\lambda} \iff \ln 0,5 = -4\lambda \iff$ $\lambda = -\dfrac{\ln 0,5}{4}$

2. On prendra ici $\lambda = 0{,}1733$.

   Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

   La probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires est la probabilité conditionnelle $P_{D \geqslant 3}(D \geqslant 3 + 5)$.

   On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs s et t : $P_{D \geqslant t}(D \geqslant s + t) = P(D \geqslant s)$.

   Donc $P_{D \geqslant 3}(D \geqslant 3 + 5) = P(D \geqslant 5) = 1 - P(D \leqslant 5) = 1 - \left(1 - e^{-5\lambda}\right) = e^{-5 \times 0,1733} \approx$ $0{,}4204$

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. D'après le cours, la variable aléatoire $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1.

2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$.

   $J \leqslant 385 \iff J - 358 \leqslant 27 \iff \dfrac{J - 358}{\sigma} \leqslant \dfrac{27}{\sigma}$ car σ est un nombre strictement positif.

On cherche donc σ pour que $P\left(X \leqslant \dfrac{27}{\sigma}\right) \leqslant 0{,}975$ sachant que X suit la loi normale centrée réduite.

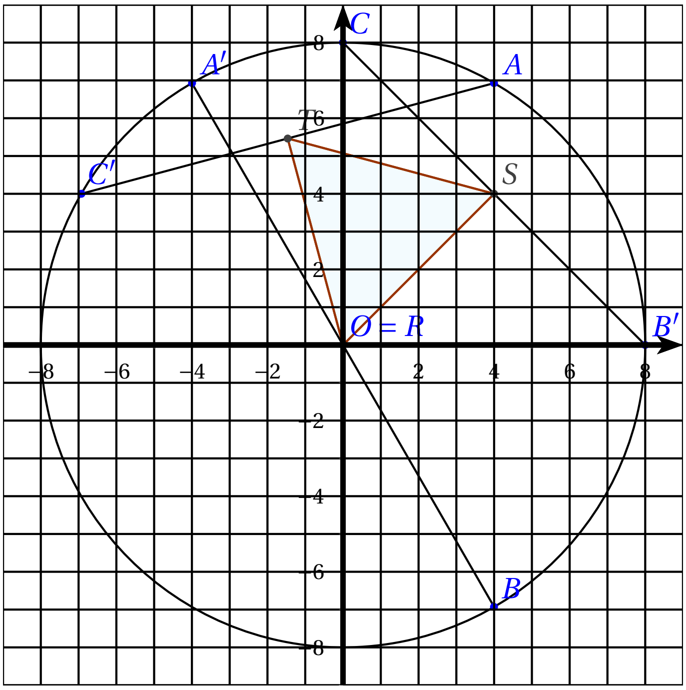
La calculatrice donne $\dfrac{27}{\sigma} \approx 1{,}96$ ce qui équivaut à $\sigma \approx 13{,}77$. On prendra donc $\sigma = 14$.

Exercice 2 **5 points**

1. Soit l'équation $z^2 - 8z + 64 = 0$.
   $\Delta = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0$.
   L'équation a deux solutions complexes conjuguées :
   $z_1 = \dfrac{8 + \text{i}\sqrt{3 \times 64}}{2} = \boxed{4 + 4\sqrt{3}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \boxed{4 - 4\text{i}\sqrt{3}}$.
   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\text{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\text{i}$. (figure à la fin de l'exercice)
   a. $|a| = |4 + 4\text{i}\sqrt{3}| = 4|1 + \text{i}\sqrt{3}| = 4 \times 2 = \boxed{8}$.
   On en déduit $a = 8\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$. Un argument de a est donc $\dfrac{\pi}{3}$.
   b. On a trouvé $a = 8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $b = \overline{a} = 8\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   c. $|a| = 8$; $|b| = \left|\overline{a}\right| = |a| = 8$ et $|c| = |8\text{i}| = 8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre 0 et de rayon 8.
   d. Voir figure en fin d'exercice.
3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. $b' = b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = 8\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = \boxed{8}$.
   b. $|a'| = \left|a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right| = |a| \times \left|\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right| = |a| = \boxed{8}$ car $\left|\text{e}^{\text{i}\theta}\right| = 1$ pour tout θ réel.
   $\arg(a') = \arg\left(a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \arg(a) + \arg\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$
   Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
4. **a.** On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
   On a : $r = \dfrac{a' + b}{2} = \dfrac{-4 + 4\text{i}\sqrt{3} + 4 - 4\text{i}\sqrt{3}}{2} = \boxed{0}$.
   $s = \dfrac{b' + c}{2} = \dfrac{8 + 8\text{i}}{2} = 4 + 4\text{i}$.
   On a admis que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \text{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.
   b. Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.
   - $RS = |s - r| = |4 + 4\text{i}| = 4|1 + \text{i}| = \boxed{4\sqrt{2}}$.

- $ST = |t - s| = |-2-2\sqrt{3}+\text{i}\left(-2+2\sqrt{3}\right)| = 2|-1-\sqrt{3}+\text{i}\left(-1+\sqrt{3}\right)|$
$= 2\sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1+\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{\left(1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3\right)} = 2\sqrt{8}$
$= \boxed{4\sqrt{2}}$.
- $RT = |t - r| = \left|2-2\sqrt{3}+\text{i}(2+2\sqrt{3})\right|$
$= 2\left|1-\sqrt{3}+\text{i}(1+\sqrt{3})\right| = 2\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3} = 2\sqrt{8}$
$= \boxed{4\sqrt{2}}$.

$RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.



Exercice 3 **6 points**

Partie A

1. g somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle : $g'(x) = \text{e}^x - 1$.
$g'(0) = 0$ et pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, $g'(x) \geqslant 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle ($x > 0 \Rightarrow \text{e}^x > \text{e}^0 > 1$).
Conclusion : $g'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, la dérivée ne s'annulant qu'en 0 donc la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
2. On a $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
La fonction étant strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on a, quel que soit x, $g(x) \geqslant g(0)$, donc $g(x) \geqslant 0$.
3. On vient de démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
$g(x) \geqslant 0 \iff \text{e}^x - x - 1 \geqslant 0 \iff \text{e}^x - x \geqslant 1$.

Partie B

1. On a $f(0) = \dfrac{1-1}{1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} = 1$.
Comme la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow$
$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \iff 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. **a.** $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + x^2 - 1}{\mathrm{e}^x - x} =$
$\dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)\left(\mathrm{e}^x - x - 1\right)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
On pouvait aussi développer $(1-x)g(x)$

b. La position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,1]$ est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur $[0\,;\,1]$, $g(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (D).

3. **a.** En posant : $u(x) = \mathrm{e}^x - x$, u est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, donc $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
On reconnaît la dérivée de la fonction $\ln|u(x)|$, mais comme on a vu que $u(x) = \mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0, |u(x)| = u(x)$.
Conclusion : une primitive sur $[0\,;\,1]$ de f est la fonction F définie par $F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - x\right)$.

b. On a vu que sur $[0\,;\,1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (D), donc l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x \left[F(x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = F(1) - \frac{1}{2} - F(0) = \ln\left(\mathrm{e}^1 - 1\right) - \frac{1}{2} - \left[\ln\left(\mathrm{e}^0 - 0\right)\right] =$
$\ln(\mathrm{e} - 1) - \dfrac{1}{2}$. (u. a.)

Partie C

1. Voir plus bas.

2. *Initialisation* : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et on a vu (question 2. b.) que sur $[0\,;\,1]$ $f(x) - x \geqslant 0$, soit avec $x = u_0$,
$f(u_0) - u_0 \geqslant 0 \iff u_1 - u_0 \geqslant 0 \iff u_1 \geqslant u_0$.
On a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. La relation est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,1]$:
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \iff u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$
et comme $u_1 > u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang$n$, elle l'est aussi au rang $n+1$.

On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n,

$\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et elle est majorée par 1.

Elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant 1$.

Or f est continue, donc comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient par continuité $\ell = f(\ell)$ qui a pour solution dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ le nombre 1.

Conclusion $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 4 **3 POINTS**

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 *point.*

1. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x (2-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Affirmation 1 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1. .

La fonction $t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^{-t}$ est évidemment continue et strictement positive sur l'intervalle d'intégration $[1;1,5]$. Donc, d'après théorème du cours, on en conclut que $\displaystyle\int_1^{1,5} (2-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t > 0$ *id est*

$F(1,5) \nleqslant 0$.

Donc FAUX

2. Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel non nul par $u_n = ln(n+1) - ln(n)$

Affirmation 2 : La suite (u_n) est convergente .

$u_n = ln(n+1) - ln(n) = ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers $ln(1) = 0$ donc la suite converge .

Donc VRAI

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N , P , S et I sont des entiers naturels.
Traitement :	Saisir N
	Saisir P
	S prend la valeur 1
	I prend la valeur N
	Tant que S < P et I > 0 faire
	| S prend la valeur$S \times I$
	|I prend la valeur $I - 1$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher I.

Affirmation 3 : Si l'utilisateur saisit $N = 10$ et $P = 10000$ alors l'algorithme retourne 6 .

	S	I	Condition
Initialisation	1	10	Vérifiée
boucle 1	10	9	vérifiée
boucle 2	90	8	vérifiée
boucle 3	720	7	vérifiée
boucle 4	5040	6	vérifiée
boucle 5	30240	5	non vérifée

Affichage 5 .
Donc FAUX

ANNEXE

EXERCICE 4