

Exercice 1

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout n entier naturel .

Exercice 2

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse .

Exercice 3

Un groupe de touristes a réservé toutes les chambres d'un hôtel-restaurant à Venise qui propose tous les soirs à ses pensionnaires le choix entre un menu gastronomique et un menu traditionnel.

On considère, pour la modélisation, que chaque soir les clients choisissent un des deux menus et que le restaurant est réservé aux clients de l'hôtel.

Une étude sur les habitudes des clients montre que, si un soir donné, un client choisit le menu gastronomique, il choisit également le menu gastronomique le soir suivant dans 60 % des cas.

Si le client choisit le menu traditionnel un soir donné, il choisit également le menu traditionnel le soir suivant dans 70 % des cas.

Afin de mieux prévoir ses commandes pour la saison estivale, le gérant souhaite connaître la proportion de clients choisissant le menu gastronomique ou le menu traditionnel à partir du 1er juin 2015. Ce soir-là, 55 % des clients ont choisi le menu gastronomique.

On note g_0 la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 1er juin 2015

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note g_n la probabilité qu'un client choisi au hasard prenne le menu gastronomique le n -ième soir après le 1er juin 2015.

De la même façon, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note t_n la probabilité qu'un client, choisi au hasard, prenne le menu traditionnel le n -ième soir après le 1er juin 2015.

On note P_n la matrice $(g_n \quad t_n)$ correspondant à l'état probabiliste au n -ième soir.

On note G l'état le client choisit le menu gastronomique et T l'état le client choisit le menu traditionnel

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets G et T .
2. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique .
3. (a) Donner la matrice P_0 correspondant à l'état initial.
(b) Calculer la probabilité qu'un client choisisse le menu gastronomique le 4 juin 2015.
On arrondira le résultat au centième.
4. (a) Déterminer la matrice $P = (g \quad t)$ correspondant à l'état stable du graphe probabiliste.
(b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.