

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : " si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p , alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ".

Partie A. Quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k , le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b .
 - (a) Démontrer que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r = 0$.
 - (b) Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b .
 - (c) En déduire que b divise $p - 1$.