

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1)

(a) Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation

$$14u + 39v = 1129.$$

(b) Trouver un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.
Vérifier que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation.

(c) En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation

$$14u + 39v = 1129.$$

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

(d) Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. (a) Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire, dans \mathbb{N} , l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

(b) Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

(c) En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.