

**Exercice 1 ( 15 points )**

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories: les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.

Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

Pour  $n \geq 1$ , on note :

- $a_n$  la probabilité que l'énigme numéro  $n$  soit facile (de catégorie A) ;
- $b_n$  la probabilité que l'énigme numéro  $n$  soit difficile (de catégorie B) ;
- $P_n = (a_n \ b_n)$  l'état probabiliste pour l'énigme numéro  $n$ .

1. Donner la matrice  $P_1$ .
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3. Écrire la matrice  $M$  associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne  $P_2$ .
4. Sachant que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $a_n + b_n = 1$ , montrer que, pour tout entier  $n \geq l$ , on a :

$$a_{n+l} = 0,75a_n + 0,1.$$

5. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose  $v_n = a_n - 0,4$ .
  - (a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - (b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$a_n = 0,8 \times 0,75^n + 0,4.$$

- (c) Préciser la limite de la suite  $(v_n)$ .
- (d) Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu, plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse ?

**Exercice 2 ( 5 points )**

En détaillant une démarche matricielle , résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 16 \\ x + 7y - z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$