$\boxed{DM\ 1}$

Exercice 1

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{pmatrix}$. *Déterminer* A^n *pour tout n entier naturel .*

Commençons par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} cos^2x - sin^2x & -2cosxsinx \\ 2cosxsinx & cos^2x - sin^2x \end{pmatrix}$

Or $2sinxcosx = sin(2x)$ *et* $cos^2x - sin^2x = cos(2x)$ *donc* $A^2 = \begin{pmatrix} cos(2x) & -sin(2x) \\ sin(2x) & cos(2x) \end{pmatrix}$

De la même façon , $A^3 = \begin{pmatrix} cos(3x) & -sin(3x) \\ sin(3x) & cos(3x) \end{pmatrix}$

On peut donc conjecturer que pour n entier naturel , $A^n = \begin{pmatrix} cos(nx) & -sin(nx) \\ sin(nx) & cos(nx) \end{pmatrix}$

On doit le montrer par récurrence .

Initialisation : faite par les calculs précédents .

Hérédité : supposons que $A^n = \begin{pmatrix} cos(nx) & -sin(nx) \\ sin(nx) & cos(nx) \end{pmatrix}$ *pour un rang n donné .*

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} cos(nx)cosx - sin(nx)sinx & -sin(nx)cosx - cos(nx)sinx \\ sin(nx)cosx + cos(nx)sinx & cos(nx)cosx - sin(nx)sinx \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos((n+1)x) & -sin((n+1)x) \\ sin((n+1)x) & cos((n+1)x) \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $(A + I_3)^3$

   D'une part , on obtient : $(A + I_3)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_3$

   D'autre part , directement à la calculatrice , en prenant $A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   on obtient la matrice nulle .

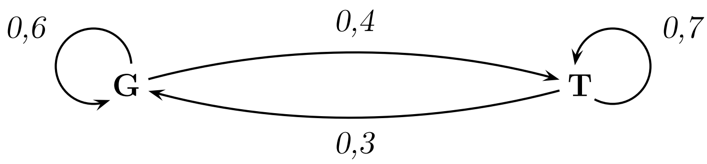
2. *En déduire que A est inversible et donner son inverse .*

   $A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = O_3$ *donc* $A(A^2 + 3A + 3I_3) = -I_3$

   A est donc inversible et son inverse est : $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1. *L'énoncé se traduit par le graphe probabiliste suivant :*



Dans la suite de l'exercice, on admet que la matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

2. (a) *Le 1er juin 1988, 55 % des clients ont choisi le menu gastronomique ; l'état initial est traduit par la matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$.*

   (b) *De $P_1 = P_0 \times M$, $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$, on déduit $P_3 = P_0 \times M^3$.*
   On obtient $P_3 \approx \begin{pmatrix} 0,43190 & 0,5682 \end{pmatrix}$.
   La probabilité que le 4 juin 2015 un client choisisse le menu gastronomique est environ 0,43 au centième près.

3. (a) *On sait que l'état stable $P = \begin{pmatrix} g & t \end{pmatrix}$ vérifie l'équation : $P = P \times M$.*

   On a donc le système : $\left\{\begin{array}{lcl} \begin{pmatrix} g & t \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} g & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \\ g+t & = & 1 \end{array}\right.$

   $$\iff \left\{\begin{array}{lcl} g & = & 0,6g + 0,3t \\ t & = & 0,4g + 0,7t \\ g+t & = & 1 \end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,4g & = & 0,3t \\ 0,3t & = & 0,4g \\ g & = & 1-t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,4(1-t) & = & 0,3t \\ g & = & 1-t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,4 & = & 0,7t \\ g & = & 1-t \end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{4}{7} & = & t \\ 0,3t & = & 0,4g \\ g & = & 1-\dfrac{4}{7} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{4}{7} & = & t \\ g & = & \dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

   On a donc $P = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} & \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$.

   (b) *Le résultat précédent signifie qu'au bout d'un certain nombre de jours la probabilité qu'un client choisisse le menu gastronomique est $\dfrac{3}{7}$.*