

1. (a) Soit a pair et tel que $a^2 + 9 = 2^n \iff 9 = 2^n - a^2$.
Ceci ne peut être vrai puisque la différence de deux pairs est paire. Donc si a existe, a est impair.
- (b) On a donc $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, donc $a^2 + 9 = 2^n \iff 4k^2 + 4k + 10 = 2^n$.
Or $4k^2 + 4k + 10 \equiv 2 \pmod{4}$ et $2^n \equiv 0 \pmod{4}$, puisque $n \geq 4$.
Conclusion : il n'existe pas de solution à l'équation $a^2 + 9 = 2^n$.
2. (a) $a^2 + 9 = 3^n$. Pour $n \geq 3$, $3 \equiv -1 \pmod{4}$, donc
 $3^n \equiv (-1)^n \pmod{4}$.
Si n est pair $3^n \equiv 1 \pmod{4}$ et si n est impair $3^n \equiv -1 \pmod{4}$ ou encore $3^n \equiv 3 \pmod{4}$.
- (b) Soit a tel que $a^2 + 9 = 3^n$. Si a est impair, son carré l'est aussi donc $a^2 + 9$ est pair, alors que 3^n est impair pour tout n .
Conclusion : si a existe, il est pair.
Puisque a est pair il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2p$, d'où $a^2 = 4p^2$.
Donc $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$.
Il en résulte que $a^2 + 9 \equiv 9 \pmod{4}$ ou plus simplement $a^2 + 9 \equiv 1 \pmod{4}$.
Conclusion : $a^2 + 9 = 3^n$ seulement si $3^n \equiv 1 \pmod{4}$, mais ceci n'est vrai que si n est pair.
Si $a^2 + 9 = 3^n$, alors n est pair.
- (c) On pose donc $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$ supérieur à 1.
– Si $a = 0$, alors $a^2 + 9 = 9 = 3^{2p}$, d'où $p = 1$: impossible car $p > 1$.
– Donc $a \neq 0$
L'équation s'écrit $a^2 + 9 = 3^{2p} \iff 9 = (3^p)^2 - a^2 = 9 \iff (3^p + a)(3^p - a) = 9$.
Les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9. Il y a donc deux possibilités
 - $\begin{cases} 3^p + a = 3 \\ 3^p - a = 3 \end{cases}$ qui n'a pas de solution car les deux nombres ne sont pas égaux, a n'étant pas nul,
 - $\begin{cases} 3^p + a = 9 \\ 3^p - a = 1 \end{cases}$
 car $3^p + a > 3^p - a$. On en déduit en sommant : $2 \times 3^p = 10 \iff 3^p = 5$ qui n'a pas de solution car 5 n'est pas une puissance de 3.
Conclusion : l'équation $a^2 + 9 = 3^n$ n'a pas de solution.
3. $a^2 + 9 = 5^n$, $n \geq 2$
 - (a) Supposons n impair ; il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
 $5^n = 5^{2k+1} = 5^{2k} \times 5$, donc puisque $5 \equiv 2 \pmod{3}$, $5^2 \equiv 2^2 \pmod{3}$, ou $5^2 \equiv 1 \pmod{3}$ et enfin $5^n \equiv 2 \pmod{3}$.
Donc s'il existe une solution a , alors $a^2 + 9 \equiv 2 \pmod{3}$.

Comme a est congru à 0, 1, ou 2 modulo 3, son carré est congru à 0 ou 1 modulo 3, et comme 9 est congru à 0 modulo 3, $a^2 + 9$ est congru à 0 ou 1 modulo 3, alors que 5^n est congru à 2 modulo 3.

Ces deux nombres ne sont donc pas égaux.

Conclusion : si n est impair l'équation $a^2 + 9 = 5^n$, $n \geq 2$ n'a pas de solution.

- (b) On suppose donc n pair ; il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ avec $k \geq 1$.
L'équation s'écrit :

$$a^2 + 9 = 5^{2k} \iff a^2 + 9 = (5^k)^2 \iff 9 = (5^k)^2 - a^2 \iff (5^k + a)(5^k - a) = 9, \text{ d'où deux possibilités :}$$

- $\begin{cases} 5^k + a = 3 \\ 5^k - a = 3 \end{cases}$ d'où par différence $2a = 0 \iff a = 0$, mais alors on aurait $a^2 + 9 = 9 = 5^n$ ce qui n'est pas possible puisque 9 n'est pas une puissance de 5.
- $\begin{cases} 5^k + a = 9 \\ 5^k - a = 1 \end{cases}$ soit en sommant $2 \times 5^k = 10 \iff 5^k = 5 \iff k = 1$ et donc $a = 4$

Conclusion : l'équation $a^2 + 9 = 5^n$, $n \geq 2$ a une seule solution : 4.