Corrigé DM 3

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Si $n = 2$: $1^2 + 3^2 + 5^2 = 35 = 8 \times 4 + 3$, c'est-dire que $1^2 + 3^2 + 5^2 \equiv 3$ modulo 3. Le triplet (1 ; 3 ; 5) est donc solution.

2. (a) Si $n = 3$

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

   Exemple : si $m = 8n + 3$ alors $m^2 = 64n^2 + 48n + 9 = 64n^2 + 48n + 8 + 1 = 8 \times (n^2 + 6n + 1) + 1 \iff m^2 \equiv 1$ modulo 8.

   (b) Les seuls restes possibles sont donc 0, 1 et 4. Avec trois carrés la somme des restes ne peut être que 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, mais pas 7.
   Conclusion : il n'existe pas d'entier $x,\ y,\ z$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8.

Partie B Étude du cas général où $n \geqslant 3$

1. S'il existe trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que
   $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n alors $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n q + 2^n - 1 = 2^n(q+1) - 1$, donc cette somme est impaire. Donc :
   - aucun des trois n'est pair ;
   - il ne peut y avoir un pair et deux impairs car la somme des carrés serait paire ;
   - il peut y avoir deux pairs ;
   - il ne peut y avoir trois pairs, car la somme des carrés serait paire.

2. $x = 2q,\ y = 2r,\ z = 2s + 1$.

   (a) Donc $x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4r^2 + 4s^2 + 4s + 1 = 4 \times (q^2 + r^2 + s^2 + s) + 1$.
   Conclusion $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4

   (b) Or on a supposé que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n soit $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n \times q + 2^n - 1 = 4\alpha - 1$ (car n est au moins égal à 3).
   Ceci est impossible : un multiple de 4 plus 1 ne peut être égal à un multiple de 4 moins 1.
   En effet s'il existe α et β tels que :
   $8\alpha - 1 = 8\beta + 1$ alors $8\alpha - 8\beta = 2 \iff 4\alpha - 4\beta = 1$. La différence de deux multiples de 4 ne peut être égale à 1. Conclusion : il n'existe pas de triplet solution avec un seul impair.

3. On suppose que $x,\ y,\ z$ sont impairs.

   (a) Pour tout naturel k non nul, $k^2 + k = k \times (k + 1)$ produit de deux naturels consécutifs : l'un des deux facteurs est pair, donc le produit est pair.

(b) Posons : $x = 2q + 1,\ y = 2r + 1$ et $z = 2s + 1$, alors
$x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4q + 1 + 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 = (4q^2 + 4q) + (4r^2 + 4r) + (4s^2 + 4s) + 3 = 4\left[(q^2 + q) + (r^2 + r) + (s^2 + s)\right] + 3$. Or d'après la question précédente chaque parenthèse est un nombre pair, donc
$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \times (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + 3 = 8(\alpha + \beta + \gamma) + 3$ c'est-à-dire que
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.

(c) Or puisque $n \geqslant 3$ on peut écrire $x^2 + y^2 + z^2 = 2^3 \times 2^{n-3}q + 2^3 \times 2^{n-3} - 1 = 2^3 a - 1 = 8a - 1$. (avec $a \in \mathbb{N}$)
On peut expliciter : s'il existe α et β tels que :
$8\alpha - 1 = 8\beta + 3$ alors $8\alpha - 8\beta = 4 \iff 2\alpha - 2\beta = 1$. La différence de deux pairs ne peut être égale à 1. Ceci est impossible : Un multiple de 8 plus 3 ne peut être égal à un multiple de 8 moins 1.
Conclusion finale : pour $n > 2$ le problème proposé n'a pas de solution.