$\boxed{DM\ 5}$

Exercice 1

1. (a) *On a* $3 \times (-3)^3 - 11 \times (-3) + 48 = -81 + 33 + 48 = 0$.
   On peut donc factoriser $3n^3 - 11n + 48$ *par* $n + 3$ *; par identification on trouve que :*
   $3n^3 - 11n + 48 = (n + 3)\left(3n^2 - 9n + 6\right)$

   (b) *Écriture canonique de :*
   $3n^2 - 9n + 16 = 3\left(n^2 - 3n + \frac{16}{3}\right) =$
   $3\left[\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{16}{3}\right] = 3\left[\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{64-27}{12}\right] = 3\left[\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{37}{12}\right]$.
   Le trinôme est une somme de deux carrés, comme c'est un entier c'est un naturel (supérieur à $\frac{37}{12} > \frac{36}{12} = 3$*).*

2. *Soit* d *un diviseur commun à* a *et* b *: il existe* k *et* k' *entiers tels que* $a = kd$ *et* $b = k'd$.
   On a donc $bc = ck'd$ *, puis* $bc - a = ck'd - kd = d(ck' - k) = ck''$ *avec*
   $k'' = ck' - k$ *entier. Donc* d *est un diviseur commun à* $bc - a$ *et à* b.
   Ceci est vrai en particulier pour le plus petit diviseur commun à a *et* b.
   Inversement soit d *un diviseur commun à* $bc - a$ *et à* b.
   Il existe donc deux entiers k *et* l *tels que* $bc - a = kd$ *et* $b = ld$*, soit*
   $a = bc - kd = ldc - kd = d(lc - k)$ *: donc* d *divise* a.
   $bc - a$ *et et* b *ont les mêmes diviseurs communs que* a *et* b *et en particulier le plus grand.*

3. *On utilise le résultat précédent avec* $a = 3n^3 - 11n$, $b = n + 3$ *et* $c = 3n^2 - 9n + 16$.
   $c \in \mathbb{Z}*$ *; comme* $n \geqslant 2$, $n + 3 \geqslant 5 > 0$.
   D'autre part $3n^3 - 11n = n\left(3n^2 - 11\right)$ *; ce nombre est positif si* $3n^2 - 11 \geqslant 0 \iff 3n^2 \geqslant 11 \iff n^2 \geqslant \frac{11}{3} \iff n \geqslant \sqrt{\frac{11}{3}} \approx 1,9$*, donc finalement il faut* $n \geqslant 2$.
   On a $bc - a = (n+3)\left(3n^2 - 9n + 16\right) - \left(2n^3 - 11n\right) = 3n^3 - 11n + 48 - 3n^3 + 11n = 48$.
   Donc d'après la question précédente le P. G. C. D$(3n^3 - 11n\ ;\ n + 3) =$
   P. G. C. D.$(48\ ;\ n + 3)$.

4. (a) $48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$*, donc les diviseurs entiers naturels de 48 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 et 48.*

   (b) *On a vu que* $3n^3 - 11n > 0$ *si* $n \geqslant 2$.
   D'après la question précédente P. G. C. D.$(3n^3 - 11n\ ;\ n + 3) = n + 3$ *si et seulement si P. G. C. D.*$(48\ ;\ n + 3)$*, c'est-à-dire que* $n + 3$ *divise 48. On retranche 3 de chaque diviseur de la liste ci-dessus plus la solution triviale 0.*
   Finalement : $n \in \{0\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 9\ ;\ 13\ ;\ 21\ ;\ 45\}$.