$\boxed{DM\ 6}$

Exercice 1

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. (a) $\dfrac{14}{39}$ *est solution de l'équation (1) signifie que :*

   $78 \times \left(\dfrac{14}{39}\right)^3 + u\left(\dfrac{14}{39}\right)^2 + \dfrac{14}{39}v - 14 = 0$

   soit par produit par 39^2

   $2 \times 14^3 + 14u + 14 \times 39v - 14 \times 39^2 = 0 \iff 14u + 39v = 1{,}129.$

   (b) $39 = 3 \times 13$ *et* $14 = 2 \times 7$ *sont premiers entre eux. On sait qu'il existe un couple* $(x\ ;\ y)$ *d'entiers vérifiant* $14x + 39y = 1$.

   L'algorithme d'Euclide donne : $\begin{array}{lcl} 39 & = & 2 \times 14 + 11 \\ 14 & = & 1 \times 11 + 3 \\ 11 & = & 3 \times 3 + 2 \\ 3 & = & 1 \times 2 + 1 \end{array}$

   soit en remontant

   $$\begin{array}{lcl} 3 - 2 & = & 1 \\ 3 - (11 - 3 \times 3) & = & 1 \iff 4 \times 3 - 11 = 1 \\ 14 - (1 \times 11) & = & 3 \Rightarrow 4[14 - 11] - 11 = 1 \iff 4 \times 14 - 5 \times 11 = 1 \\ 39 - 2 \times 14 & = & 11 \Rightarrow 4 \times 14 - 5(39 - 2 \times 14) = 1 \iff -5 \times 39 + 14 \times 14 = 1 \end{array}$$

   On a donc trouvé $x = 14,\ y = -5$.

   On a $-25 \times 14 + 9 \times 39 = -350 + 351 = 1$. *Donc le couple* $(-25\ ;\ 9)$ *est aussi solution de l'équation.*

   (c) $-25 \times 14 + 9 \times 39 = 1 \Rightarrow -25 \times 1{,}129 \times 14 + 9 \times 1{,}129 \times 39 = 1{,}129 \iff$
   $14 \times -28{,}225 + 39 \times 10{,}161 = 1{,}129.$

   Le couple $(u_0\ ;\ v_0) = (-28{,}225\ ;\ 10{,}161)$ *est donc solution de l'équation* $14u+39v = 1{,}129$.

   On a :

   $14u + 39v = 1{,}129$

   $14 \times -28{,}225 + 39 \times 10{,}161 = 1{,}129$

   d'où par différence :

   $14(u + 28{,}225) + 39(v - 10{,}161) = 0 \iff 14(u + 28{,}225) = 39(10{,}161 - v). \quad (1)$

   Donc 14 divisant $39(10{,}161 - v)$ *et étant premier avec 39, divise* $(10{,}161 - v)$. *Il existe donc* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $10{,}161 - v = 14k \iff v = 10{,}161 - 14k$, *puis en reportant dans l'égalité (1) :*

   $14(u + 28{,}225) = 39(14k) \iff u + 28{,}225 = 39k \iff u = 39k - 28{,}225.$

   L'ensemble des couples solutions est donc

   $S = \{(39k - 28{,}225\ ;\ 10{,}161 - 14k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$

(d) *On a* $39k - 28{,}225 = 0 \iff k = \dfrac{28{,}225}{39} \approx 724.$

Vérification : $39 \times 724 - 28{,}225 = 11$ *et* $39 \times 723 - 28{,}225 = -28.$

On en déduit $v = 10{,}161 - 14 \times 724 = 25.$

Le couple solution avec le plus petit premier terme naturel est $(11 ; 25)$.

2. (a) $78 = 2 \times 3 \times 13$ *et* $14 = 2 \times 7$ *On a* $\mathcal{D}_{78} = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 13 ; 26 ; 39 ; 78\}$ *et* $\mathcal{D}_{14} = \{1 ; 2 ; 7 ; 14\}$.

(b) $\dfrac{P}{Q}$ *une solution rationnelle de l'équation (1) signifie*

$78\dfrac{P^3}{Q^3} + u\dfrac{P^2}{Q^2} + v\dfrac{P}{Q} - 14 = 0 \iff 78P^3 + uP^2Q + vPQ^2 - 14Q^3 = 0 \iff P\left(78P^2 + uPQ + vQ^2\right) = 14Q^3.$

Comme P *divise* $14Q^3$ *et est premier avec* Q, *il divise 14.*

De même on peut écrire $14Q^3 - vPQ^2 - uP^2Q = 78P^3 \iff$

$Q\left(14Q^2 - vPQ - uP^2\right) = 78P^3.$

Q *divise* $78P^3$, *est premier avec* P *donc avec* P^3 *: il divise 78.*

(c) *On a donc* $P \in \mathcal{D}_{14}$ *et aussi leurs opposés et* $Q \in \mathcal{D}_{78}$ *et leurs opposés.*

En théorie il y a $4 \times 8 = 32$ *possibilités avec des termes positifs, mais comme* P *et* Q *doivent être premiers entre eux, si* P *est pair* Q *ne peut l'être et inversement. Il faut donc enlever* $2 \times 4 = 8$ *couples. Il faut également enlever les 4 couples avec* $Q = 1$ *qui donnent une solution entière.*

Il reste donc 20 couples positifs et autant de négatifs, soit 40 couples possibles.

Les 20 rationnels positifs non entiers possibles sont :

$\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{1}{13}$; $\dfrac{1}{26}$; $\dfrac{1}{39}$; $\dfrac{1}{78}$; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{2}{13}$; $\dfrac{2}{39}$; $\dfrac{7}{2}$; $\dfrac{7}{3}$; $\dfrac{7}{6}$; $\dfrac{7}{13}$; $\dfrac{7}{26}$; $\dfrac{7}{39}$; $\dfrac{7}{78}$; $\dfrac{14}{3}$; $\dfrac{14}{13}$; $\dfrac{14}{39}$.