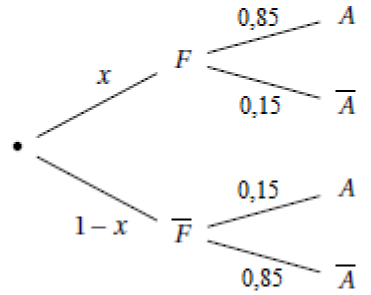
Corrigé du Bac Blanc 2019

Ex 1 : 1a) $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3\ln 1 = \mathbf{0}$.
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty}$.
b) $\varphi'(x) = 2x + 3\times\frac{1}{x} = 2x + \frac{3}{x} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$ donc **φ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.**
Or, d'après le **1a)**, la fonction φ s'annule en 1, donc $\varphi(x)$ est **négatif si $x \in\,]0\,;1[$** et **positif si $x \in\,]1\,;+\infty[$.**
2a) Comme $x \in\,]0\,;+\infty[$, le dénominateur de $f(x)$ tend vers 0^+, de plus $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2x - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} -3\ln x = +\infty$ donc et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2x - 2 - 3\ln x = +\infty$. On en déduit que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$.
En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée, on transforme l'écriture : $f(x) = x - 2 - \frac{2}{x} - 3\frac{\ln x}{x}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 - \dfrac{2}{x} = +\infty$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
b) $f'(x) = \frac{\left(2x-2-\frac{3}{x}\right)\times x - (x^2-2x-2-3\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2} = \frac{x^2-1+3\ln x}{x^2} = \frac{\boldsymbol{\varphi(x)}}{\boldsymbol{x^2}}$.
Un carré est toujours positif donc $f'(x)$ a le signe de $\varphi(x)$ vu au **1b)**, et $f(1) = \frac{1^2-2\times 1-2-3\ln 1}{1} = -3$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

c) La fonction f est **continue** sur $]0\,;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions de référence continues, **strictement croissante** sur $]0\,;1]$ et **0 est compris entre $+\infty$ et 3**. Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α sur $]0\,;1]$.
Par balayage, on trouve que $\alpha \in\,]0{,}4\,;0{,}5[$ puis que $\alpha \in\,]0{,}41\,;0{,}42[$. Ainsi **$\alpha \approx 0{,}41$** (ou 0,42) à 10^{-2} près.

Ex 2 : Partie A 1) X suit la **loi binomiale** de paramètres $\boldsymbol{n = 700}$ et $\boldsymbol{p = 0{,}6}$. En effet, il s'agit d'une expérience de Bernoulli avec succès : la personne interrogée accepte de répondre ($p = 0{,}6$) et échec : elle refuse de répondre répétée $n = 700$ fois de façon identique et indépendante et X représente le nombre de succès c'est-à-dire le nombre de personnes qui ont accepté de répondre.
2) La calculatrice donne $P(X \leq 399) \approx 0{,}057$ donc $P(X \geq 400) \approx 1 - 0{,}057 \approx 0{,}943$. La meilleure approximation de $P(X \geq 400)$ est donc **0,94**.
2) Dans cette question, X suit une loi binomiale de paramètres n inconnu est $p = 0{,}6$. On cherche à déterminer la valeur minimale de n tel que $P(X \geq 400) \geq 0{,}9$ c'est-à-dire telle que $P(X \leq 399) \leq 0{,}1$.
On tape Y1 = **binomFRép(X , 0.6 , 399)** et on affiche un tableau de valeurs pour des valeurs de X proches de 700. On obtient que $\boldsymbol{n \geq 694}$.
Partie B 1) Le taux de personnes non sincères est de 15 % donc $\boldsymbol{P_F(A) = 0{,}85}$ et $\boldsymbol{P_{\overline{F}}(A) = 0{,}15}$.
2a)



b) $P(A) = P(F\cap A) + P(\overline{F}\cap A) = P_F(A)\times P(F) + P_{\overline{F}}(A)\times P(\overline{F})$ donc $\boldsymbol{0{,}85x + 0{,}15(1-x) = 0{,}29}$.
3) On en déduit que $0{,}7x = 0{,}14$ et donc $x = \frac{0{,}14}{0{,}7} = 0{,}2$ c'est-à-dire $P(F) = 0{,}2$. La proportion est **20 %**.

Ex 3 : • Proposition 1 : **Faux**

Il suffit de trouver un contre-exemple : pour $\theta = \frac{\pi}{2} \in]0\ ;\ \pi[$, $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i \notin \mathbb{R}$.

• Proposition 2 : **Vrai**

$(z+5)(z^2 - 8z + 25) = 0$: soit $z + 5 = 0$ c'est-à-dire $z = \mathbf{-5}$, soit $z^2 - 8z + 25 = 0$: Δ = – 36 < 0, il y a deux autres solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{8+6i}{2} = \mathbf{4 + 3}\boldsymbol{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \mathbf{4 - 3}\boldsymbol{i}$. Or |– 5| = 5 et, par ailleurs, $|z_1| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ de même que $|z_2| = |z_1| = 5$. Donc les trois points d'affixes – 5, $3 + 4i$ et $3 - 4i$ sont bien sur un même cercle de centre O et de rayon 5.

• Proposition 3 : **Faux**

Commençons par écrire $-\sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle : $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ puis : $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{5\pi}{6}$, d'où $-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Donc $\left(-\sqrt{3} + i\right)^8 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^8$ $= 256\, e^{i\frac{40\pi}{6}} = 256\, e^{i\frac{20\pi}{3}} = 256\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ car $\frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 3 \times 2\pi$. Donc $\left(-\sqrt{3} + i\right)^8$ a pour argument $\frac{2\pi}{3}$ et pas $\frac{\pi}{3}$.

• Proposition 4 : **Vrai**

$j = 1e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $j^2 + j + 1 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} + 1$ $= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$. Donc j est bien une solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

Note : on pouvait commencer par résoudre l'équation puis calculer le module et un argument des solutions.

• Proposition 5 : **Faux**

On pose $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$. L'équation $z - \overline{z} + 2 - 4i = 0$ devient $a + ib - a + ib + 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow$ $2ib + 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow 2 + i(2b - 4) = 0$. C'est impossible car en identifiant les parties réelles on obtiendrait $2 = 0$. Cette équation n'a aucune solution.

Ex 4 : Partie A 1) La population croît de 5 % chaque année, elle est donc multipliée par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$ chaque année. Ainsi $v_{n+1} = 1{,}05 v_n$ donc la suite (v_n) est **géométrique** de raison $q = 1{,}05$.

On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = \mathbf{12 \times 1{,}05^{\boldsymbol{n}}}$.

2) $1{,}05 > 1$ donc $\mathbf{1{,}05^{\boldsymbol{n}}}$ **tend vers** +∞ de même que la suite (v_n). Cela **contredit les contraintes** du milieu naturel selon lesquels v_n ne peut pas dépasser 60.

Partie B 1a) $g'(x) = -\frac{1{,}1}{605} \times 2x + 1{,}1 = -\frac{2{,}2}{605}x + 1{,}1$. On remarque que g' est une fonction affine décroissante donc si $x \in [0\ ;\ 60]$ c'est-à-dire si $0 \le x \le 60$ alors $g'(0) \ge g'(x) \ge g'(60)$ avec $g'(60) \approx 0{,}88 \ge 0$. Ainsi $g'(x) \ge 0$ sur [0 ; 60] et donc $\boldsymbol{g}$ **est croissante sur [0 ; 60]**.

b) $g(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x = x \Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 0{,}1x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1{,}1}{605}x + 0{,}1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou bien $-\frac{1{,}1}{605}x + 0{,}1 = 0$; $-\frac{1{,}1}{605}x = -0{,}1$; $x = -0.1 \times \frac{-605}{1{,}1}$; $x = 55$. Il y a deux solutions : **0 et 55**.

2a) $u_1 = g(u_0) = g(12) = -\frac{1{,}1}{605} \times 12^2 + 1{,}1 \times 12 \approx \mathbf{12{,}938}$. En **2017** la population était de **12 938 individus**.

b) Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 12$ donc on a bien $0 \le u_0 \le 55$.

Hérédité : Supposons que $0 \le u_n \le 55$ soit vrai pour un certain entier n. D'après le **1a)**, la fonction g est croissante sur [0 ; 55] donc $g(0) \le g(u_n) \le g(55)$. Mais d'après le **1b)**, $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$, donc $0 \le u_{n+1} \le 55$ ce qui signifie que la propriété est héréditaire.

Conclusion : la propriété $0 \le u_n \le 55$ est vraie pour tout entier naturel n.

c) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$ or on a vu au **2b)** que le $g(x) - x = -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 0{,}1x$ est un polynôme du second degré qui admet pour racines 0 et 55 : entre ses racines il a un signe opposé au signe de $a = -\frac{1{,}1}{605}$ donc positif. Or, d'après le **2b)**, $u_n \in [0\ ;\ 55]$ donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$ et ainsi la suite $(\boldsymbol{u_n})$ **est croissante**.

d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 elle est donc **convergente**.
e) D'après le **1b)** les seules solutions de l'équation $g(\ell) = \ell$ sont 0 et 55. Comme $u_0 = 12$ et que cette suite est croissante, sa limite ne peut pas être 0, on en déduit que la suite $(\boldsymbol{u_n})$ **converge vers 55**. Cela signifie que la population va se rapprocher de 55 000 individus. **Ce second modèle répond aux contraintes du milieu naturel**.
3) Si on veut que la boucle s'arrête au moment où u dépasse 50 il faut que le test de la boucle « Tant Que » soit : $\boldsymbol{u < 50}$. Dans cette boucle u prend la valeur $\boldsymbol{-\frac{1{,}1}{605}u^2 + 1{,}1u}$ et n prend la valeur $\boldsymbol{n+1}$. Ensuite il ne reste qu'à **afficher $\boldsymbol{n}$**.

Ex 5 : Soit $k > 0$, on étudie la fonction f_k. On dérive : $f_k'(x) = 1 - k\mathrm{e}^{-x}$ et on étudie le signe de la dérivée.

$f_k'(x) > 0$	$f_k'(x) = 0$	$f_k'(x) < 0$
$1 - k\mathrm{e}^{-x} > 0$	$1 - k\mathrm{e}^{-x} = 0$	$1 - k\mathrm{e}^{-x} < 0$
$-k\mathrm{e}^{-x} > -1$	$-k\mathrm{e}^{-x} = -1$	$-k\mathrm{e}^{-x} < -1$
$\mathrm{e}^{-x} < \frac{1}{k}$	$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{k}$	$\mathrm{e}^{-x} > \frac{1}{k}$
$-x < \ln\frac{1}{k}$	$-x = \ln\frac{1}{k}$	$-x > \ln\frac{1}{k}$
$-x < -\ln k$	$-x = -\ln k$	$-x > -\ln k$
$x > \ln k$	$x = \ln k$	$x < \ln k$

On peut alors tracer le tableau de variations de la fonction f_k.

x	$-\infty$		$\ln k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$		$\searrow$	$\ln k + 1$	$\nearrow$	

En effet : $f_k(\ln k) = \ln k + k\mathrm{e}^{-\ln k} = \ln k + k \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln k}} = \ln k + k \times \frac{1}{k} = \ln k + 1$.
La fonction f_k admet bien un minimum sur $\mathbb{R}$ et le point A_k a des coordonnées $(\ln k\ ; \ln k + 1)$ qui vérifient l'égalité : $y_{A_k} = x_{A_k} + 1$. Donc **tous les points $\boldsymbol{A_k}$ sont bien alignés sur la droite d'équation $\boldsymbol{y = x + 1}$**.