DS n° 1 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

1. **a.** Ecrire z_A sous forme exponentielle .

b. Ecrire z_K sous forme algébrique .

2. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

3. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

4. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5. Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$ .Soit C le point tel que $z_C = e^{\frac{i\pi}{4}} z_L$ .Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **10 points**

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

a. Démontrer que la fonction f admet un minimum.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$. (On raisonnera par récurrence)

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

c. On déduit de la relation ($\star$) que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$. Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

b. Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$. Affecter à d la valeur $0,5d^2$ Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5. Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ? Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.