DS 3 : 15 novembre 2018 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 - 2z + 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_\text{B} = 2\text{i}$.
   - **a.** Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   - **b.** Faire une figure et placer les points A et B.
   - **c.** Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.
3. On note F le point d'affixe $z_\text{F} = z_\text{A} + z_\text{B}$.
   - **a.** Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
   - **b.** En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OF}}\right)$ puis de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{OF}}\right)$.
   - **c.** Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
   - **d.** En déduire la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

   et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

   Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **10 points**

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_2(x) = (x+2)\text{e}^{-x}.$$

La courbe représentative de f_2, notée $\mathscr{C}_2$, est tracée dans un repère orthonormé sur l'ANNEXE à rendre avec la copie.

Aucune justification ni aucun calcul ne sont attendus dans cette partie.

1. Conjecturer les limites de f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Conjecturer le tableau de variations de f_2 à l'aide du graphique.
3. Soit T_2 la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente sur l'ANNEXE à rendre avec la copie, puis en conjecturer une équation par lecture graphique.

Partie B

Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = (x+m)\mathrm{e}^{-x}$$

et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On admet que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f'_m sa dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'_m(x) = (-x-m+1)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de f_m sur $\mathbb{R}$.
4. **a.** Pour tout réel m, on note T_m la tangente à la courbe $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0.
   Démontrer que T_m a pour équation réduite $y = (1-m)x + m$.

   b. Démontrer que toutes les droites T_m passent par un même point dont on précisera les coordonnées.
5. Étudier le signe de $f_m(x)$ pour tout réel x.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

NOM :