# DS 4 : 6 décembre 2018 Terminale S

# Mathématiques

**EXERCICE 1** **10 points**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x + (1-x)\mathrm{e}^{2x}\right].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique 2 cm)

1. **a.** Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

   **b.** Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\Delta$ la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.

   **a.** Étudier le sens de variation de $u$.
   Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.
   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

   **b.** Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de $x$.
4. Étudier le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variations.
5. Tracer la droite $\Delta$ et la courbe $\mathscr{C}$

**EXERCICE 2** **10 points**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit $a$ un réel positif.
On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$.

   **a.** En remarquant que $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - u_n + \dfrac{3}{2}$, montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}\ell^2 - \ell + \dfrac{3}{2}$.

   **b.** Montrer que les valeurs possibles de $\ell$ sont 1 et 3.
3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.

   **a.** Montrer que $f$ est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   **b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

**c.** Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

**4.** Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite $(u_n)$ est croissante.

**a.** À l'aide des questions précédentes montrer que la suite $(u_n)$ n'est pas majorée.

**b.** En déduire le comportement de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**c.** L'algorithme suivant calcule le plus petit rang $p$ pour lequel $u_p > 10^6$.
Recopier et compléter cet algorithme.
$P$ est un nombre entier et $U$ est un nombre réel.

```
P ← 0
U ......

Tant que ...
    P ← ......
    U ← ......
Fin Tant que
```