DS 5 : 10 janvier 2019 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. En déduire la convergence de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

d. Calculer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2\,018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »
Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

EXERCICE 2 **10 points**

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

– parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
– parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

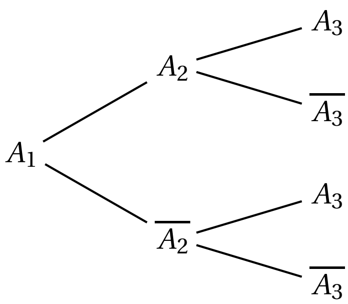
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. **a.** Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

   b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

   c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?

   Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

   c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (p_n).