DS 6 : 7 mars 2019 Terminale S

Mathématiques

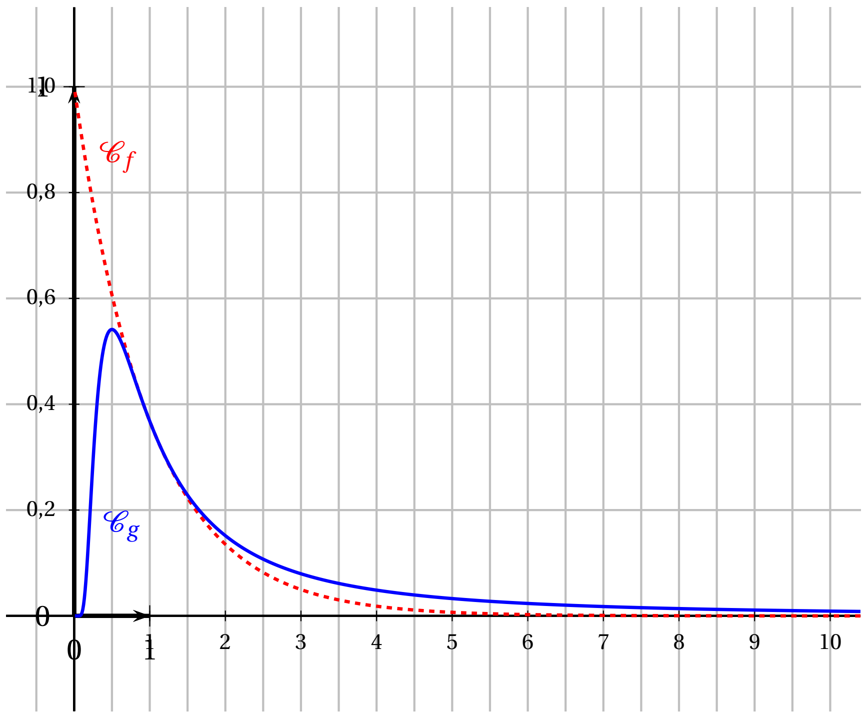
EXERCICE 1 **10 points**

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}.$$

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous :



Partie A – Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B – Étude de la fonction g

1. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \ln\big(g(x)\big)$.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$h(x) = \frac{-1 - 2x\ln x}{x}.$$

b. Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.

c. En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$g'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}\left(1 - 2x\right)}{x^4}.$$

4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0~;~+\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. Démontrer que la point A de coordonnées $\left(1~;~e^{-1}\right)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0~;~1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que

$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x = e^{-a} + e^{-\frac{1}{a}} - e^{-b} - e^{-\frac{1}{b}}.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{a \to 0} \int_a^1 \left(f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x = 1 - 2e^{-1}.$$

4. On admet que

$$\lim_{a \to 0} \int_a^1 \left(f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \left(g(x) - f(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Interpréter graphiquement cette égalité.

EXERCICE 2 **10 points**

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - \mathrm{i}$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - \mathrm{i}).$$

3. **a.** Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

b. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0.$$

c. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4. **a.** Soit n un entier naturel. déterminer un argument de u_n.

b. Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation réduite :

$$y = -x + 1.$$