DS 6 : 28 mars 2019 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **8 points**

Soit k un réel strictement positif.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1,\ u_1 = k$ et, pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{ku_n}.$$

On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

1. Exprimer $u_2,\ u_3$ et u_4 en fonction de k.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) pour deux valeurs de k.
La valeur du réel k est entrée dans la cellule E2.

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	n	$u(n)$				1	n	$u(n)$			
2	0	1		$k =$	2,718 281 8	2	0	1		$k =$	0,9
3	1	2,718 281 8				3	1	0,9			
4	2	2,718 281 8				4	2	0,9			
5	3	1				5	3	1			
6	4	0,135 335 3				6	4	1,234 567 9			
7	5	0,006 731 9				7	5	1,693 508 8			
8	6	0,000 123 4				8	6	2,581 174 8			
9	7	8,315E−07				9	7	4,371 242 2			
10	8	2,061E−09				10	8	8,225 263 3			
11	9	1,88E−12				11	9	17,196 982			
12	10	6,305E−16				12	10	39,949 576			
13	11	7,781E−20				13	11	103,116 84			
14	12	3,533E−24				14	12	295,736 2			
15	13	5,9E−29				15	13	942,403 49			
16	14	3,625E−34				16	14	3 336,773 8			

a. Quelle formule, saisie dans la cellule B4, permet par recopie vers le bas de calculer tous les termes de la suite (u_n) ?

b. Conjecturer, dans chaque cas, la limite de la suite (u_n).

Dans la suite, on suppose que $k = \mathrm{e}$.

On a donc $u_0 = 1$, $u_1 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}u_n}$.

1. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = ln(u_{n+1}) - ln(u_n)$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0 = 1$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

2. On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \dfrac{n(3-n)}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = ln\,(u_n)$.

3. **a.** Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n).

b. Trouver la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$ par la méthode de votre choix (écriture d'un algorithme, résolution d'inéquation, etc.)

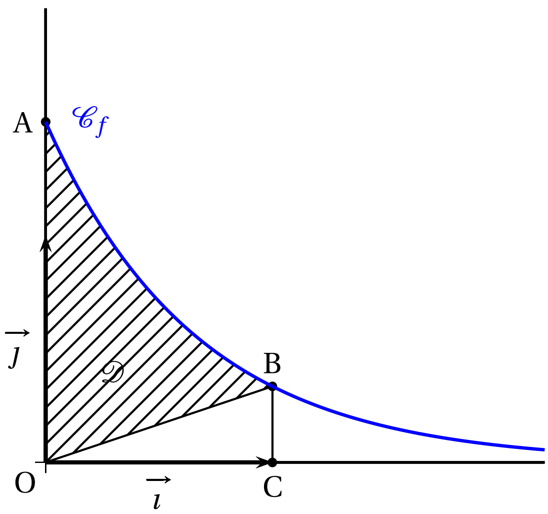
EXERCICE 2 — 6 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-kx}$ où k est un nombre réel strictement positif.

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On considère le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.

Le point C a pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$.



1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Exprimer, en fonction de k, l'aire du triangle OCB et celle du domaine $\mathscr{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}_f$ et le segment [OB].

3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

EXERCICE 3 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D} tels que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} z_{\text{A}} + z_{\text{C}} & = & z_{\text{B}} + z_{\text{D}} \\ z_{\text{A}} + \text{i}z_{\text{B}} & = & z_{\text{C}} + \text{i}z_{\text{D}} \end{array}\right.$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.