DS n° 2 Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

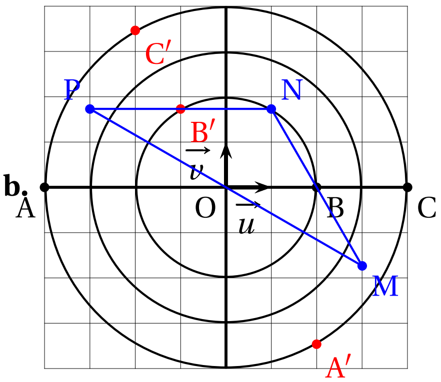
1. **a.** $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \exp\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}$

   $a' = a\mathrm{j} = -4\mathrm{j} = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\left(-\exp\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}\right) = 4\left(\exp \mathrm{i}\pi \exp\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}\right) = 4\exp \mathrm{i}\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 4\exp\frac{5\mathrm{i}\pi}{3} = 4\exp -\frac{\mathrm{i}\pi}{3}$

   $b' = b\mathrm{j} = 2\mathrm{j} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\exp\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}$

   $c' = c\mathrm{j} = 4\mathrm{j} = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\exp\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}$

   b.



   $|a'| = 4$ donc A′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re\left(a'\right) = 2$ et $Im\left(a'\right) < 0$, on peut donc placer A′

   $|b'| = 2$ donc B′ est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et on a $Re\left(b'\right) = -1$ et $Im\left(b'\right) > 0$, on peut donc placer B′

   $|c'| = 4$ donc C′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re\left(c'\right) = -2$ et $Im\left(c'\right) > 0$, on peut donc placer C′

2. $a' = -c'$ donc A′ et C′ sont symétriques par rapport à O alors O, A′ et C′ sont alignés

   $arg\left(b'\right) = arg\left(c'\right) = \dfrac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ sont colinéaires d'où O, B′ et C′ sont alignés.

   Finalement O, A′, B′ et C′ sont alignés.

3. $z_{\mathrm{M}} = \dfrac{a' + c}{2} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{N}} = \dfrac{c' + c}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{P}} = \dfrac{c' + a}{2} = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

   MNP semble isocèle en N d'après le dessin

   MN=$|z_{\mathrm{N}} - z_{\mathrm{M}}| = \left|2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 4$ et PN=$|z_{\mathrm{N}} - z_{\mathrm{P}}| = |4| = 4$

   On a MN=NP donc MNP est bien isocèle en N

EXERCICE 2 **10 points**

1. L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de 3000+80, c'est-à-dire 3080. Entre le 1er novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1er juin 2018 est donc :

$$u_1 = 3\,080 \times 0{,}95 = 2\,926$$

2. En généralisant, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 80) \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 80 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 76. \end{aligned}$$

3. Formule à entrer dans la cellule C2 : $\boxed{= 0.95*B2 + 76}$.

4. **a.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,520$.
   - **Initialisation**. On a $u_0 = 3\,000 \geqslant 1\,520$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité.** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 1\,520$. Démontrons alors que $u_{n+1} \geqslant 1\,520$.
     Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1\,520$, donc, en multipliant membre à membre par 0,95 :
     $$0{,}95u_n \geqslant 0{,}95 \times 1\,520$$
     puis, en ajoutant membre à membre 76 :
     $$0{,}95u_n + 76 \geqslant 0{,}95 \times 1\,520 + 76$$
     ce qui équivaut à :
     $$u_{n+1} \geqslant 1520$$
     ce qu'il fallait démontrer. La propriété est donc héréditaire.
   - **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 1\,520$

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0{,}95u_n + 76 - u_n \\ &= -0{,}05u_n + 76. \end{aligned}$$

   D'après la question précédente, $u_n \geqslant 1\,520$, donc $-0{,}05u_n \leqslant -0{,}05 \times 1\,520$, c'est-à-dire $-0{,}05u_n \leqslant -76$, par conséquent, $-0{,}05u_n + 76 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante

5. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,520 \\ &= 0{,}95u_n + 76 - 1\,520 \\ &= 0{,}95u_n - 1\,444 \\ &= 0{,}95\left(u_n - \frac{1\,444}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95\,(u_n - 1\,520) \\ &= 0{,}95v_n. \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,95.
   Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1\,520 = 1\,480$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 1\,480 \times 0{,}95^n$. Et comme $v_n = u_n - 1\,520$, on en déduit que $u_n = v_n + 1\,520$, ce qui donne bien

$$u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520.$$

c. $-1 < 0{,}95 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$, on en déduit, par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1\,520$.

6. Algorithme complété :

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u ⩾ 2000 :
    n ← n + 1
    u ← 0,95 * u + 76
Fin de Tant que
```

7. La limite de la suite (u_n) est 1 520 qui est inférieur à 2000, donc la réserve fermera un jour. Pour déterminer l'année de fermeture, on peut programmer l'algorithme précédent, ou résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 2\,000 &\iff 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520 \leqslant 2\,000 \\ &\iff 1\,480 \times 0{,}95^n \leqslant 480 \\ &\iff 0{,}95^n \leqslant \frac{480}{1\,480} \\ &\iff n \ln(0{,}95) \leqslant \ln\left(\frac{480}{1\,480}\right) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{480}{1\,480}\right)}{\ln(0{,}95)} \end{aligned}$$

À la calculatrice, $\dfrac{\ln\left(\frac{480}{1\,480}\right)}{\ln(0{,}95)} \approx 21{,}95$. C'est donc la 22^e^ année que la réserve fermera, soit en 2039