corrigé DS 3 : 15 novembre 2018 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

1. $\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4\right)=0 \iff \left[\begin{array}{lcl} z^2-2z+4 & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ z^2+4 & = & 0 \end{array}\right.$.

- $z^2-2z+4=0 \iff (z-1)^2-1+4=0 \iff (z-1)^2=-3 \iff (z-1)^2=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.

Cette équation a deux solutions $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

- $z^2+4=0 \iff z^2=(2\mathrm{i})^2$: cette équation a deux solutions : $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

Conclusion : l'équation a quatre solutions :

$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $2\mathrm{i}$; $-2\mathrm{i}$.

2. **a.** • $|z_A|^2=1+3=4=2^2 \Rightarrow |z_A|=2$.

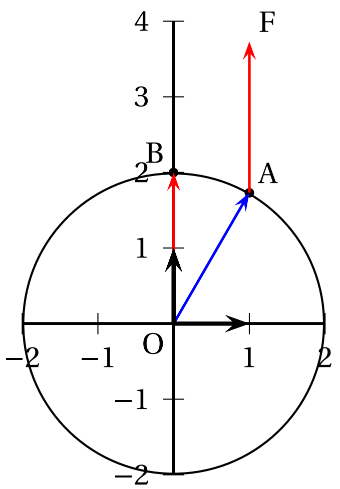
On peut écrire $z_A=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ soit en écriture exponentielle

$z_A=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

• $z_B=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

On a donc avec les modules OA = OB = 2 : A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b.



c. On a $\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Or $\left(\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{OB}\right)=\arg\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{\pi}{6}$.

3. **a.** F se construit par la méthode du parallélogramme; or on a vu que OA = OB : le parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

b. OAFB est un parallélogramme et OA = OB = 1, donc deux de ses côtés consécutifs ont même longueur : OAFB est donc un losange et par conséquent la droite (OF) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$; donc une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OF}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{12}$.

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OF}}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OA}}\right) + \left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OF}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$ qui est un argument de z_{F}.

c. On a $z_{\text{F}} = z_{\text{A}} + z_{\text{B}} = 1 + \text{i}\sqrt{3} + 2\text{i} = 1 + \text{i}\left(\sqrt{3}+2\right)$.

Donc $|z_{\text{F}}|^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3}+2\right)^2 = 1+3+4+4\sqrt{3} = 8+4\sqrt{3} = 4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Donc $|z_{\text{F}}| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

On a vu qu'un argument de z_{F} est $\dfrac{5\pi}{12}$, donc l'écriture trigonométrique de z_{F} est :

$z_{\text{F}} = 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \text{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

d. On a vu que la partie réelle de z_{F} est égale à 1 et d'après la question précédente elle est aussi égale à $2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

Donc en égalant :

$1 = 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12} \iff \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\times(4-3)} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

4. Ces deux nombres sont positifs ($\sqrt{6} > \sqrt{2}$) ; comparons leurs carrés :

- $\left[\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$;
- $\left[\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2 = \dfrac{6+2-2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

EXERCICE 2 — 10 points

Partie A

$$f_2(x) = (x+2)\text{e}^{-x}.$$

1. On peut conjecturer que la limite de f_2 au voisinage de moins l'infini est moins l'infini et que la limite au voisinage de plus l'infini est 0.

2. f_2 semble être croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ puis décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

3. Voir le tracé de la tangente sur l'annexe. Une équation de T_2 doit être $y = 2 - x$.

Partie B

$$f_m(x) = (x+m)\text{e}^{-x}$$

1. Quel que soit le réel m, $\lim\limits_{x \to -\infty} x + m = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$,d'où par produit de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = -\infty$.
   $f_m(x) = x\text{e}^{-x} + m\text{e}^{-x}$.
   On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\text{e}^{-x} = 0$ et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} m\text{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 0$.
2. On a par dérivée d'un produit :
   $f'_m(x) = 1\text{e}^{-x} - (x + m)\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(1 - x - m)$.
3. Comme $\text{e}^{-x} > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f'_m(x)$ est celui de $1 - x - m$.
   Or $1 - x - m > 0 \iff x < 1 - m$: sur $]-\infty\ ;\ 1 - m]$, la fonction f_m est croissante de moins l'infini à $f_m(1 - m) = (1 - m + m)\text{e}^{1-m} = \text{e}^{1-m}$.
   $1 - x - m < 0 \iff x > 1 - m$: sur $]1 - m\ ;\ +\infty]$, la fonction f_m est décroissante de $f_m(1 - m) = \text{e}^{1-m}$ à 0.
4. **a.** On sait qu'une équation de T_m est $y - f_m(0) = f'_m(0)(x - 0)$.
   Or $f_m(0) = m$ et $f'_m(0) = 1 - m$.
   Donc une équation de T_m est $y - m = x(1 - m)$ ou $y = (1 - m)x + m$.

   b. On voit facilement que si $x = 1$, alors $y = 1$: toutes les droites T_m contiennent le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$.
5. f_m est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1 - m]$ de moins l'infini à $\text{e}^{1-m} > 0$. Étant continue car dérivable sur cet intervalle elle s'annule donc une seule fois en $x = -m$.
   Conclusion : $f_m(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ -m[$ et $f_m(x) > 0$ sur $]-m\ ;\ +\infty[$.