corrigé DS 4 : 6 décembre 2018 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Partie B

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[x + (1-x)\mathrm{e}^{2x}\right]$

a. On a (croissance comparée) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x\mathrm{e}^{-2x} + 1 - x)$; la limite de $x\mathrm{e}^{-2x}$ en $+\infty$ est égale à 0 et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-2x} = -\infty$. Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. On calcule la différence $d(x) = f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}$. On sait que $\dfrac{1}{2}e^{2x}$ est positif pour tout réel x . Donc d(x) est du signe de $1-x$. Conclusion $(\mathscr{C})$ est au dessus de Δ sur $]-\infty;1[$ et en dessous sur $]1;+\infty[$

2. x, $(1-x)$ et e^{2x} sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f fonction obtenue par somme et produit de ces fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2}x + \left(\dfrac{1-x}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2x}\left(\dfrac{1-x}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}(1-2x) = \dfrac{1}{2}\left[1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}\right]$.

3. $u(x) = 1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}$

a. $u'(x) - 2\mathrm{e}^{2x} + 2(1-x)\mathrm{e}^{2x} = -4x\mathrm{e}^{2x}$ qui est du signe de $-x$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$			$-$		
$u(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b. On a $u(0) = 1 + 1 = 2$ et $u(1) = 1 - \mathrm{e} < 0$. Donc sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction u est : dérivable ; monotone décroissante ; $u(0) > 0$ et $u(1) < 0$.

Conclusion : il existe un réel unique α de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

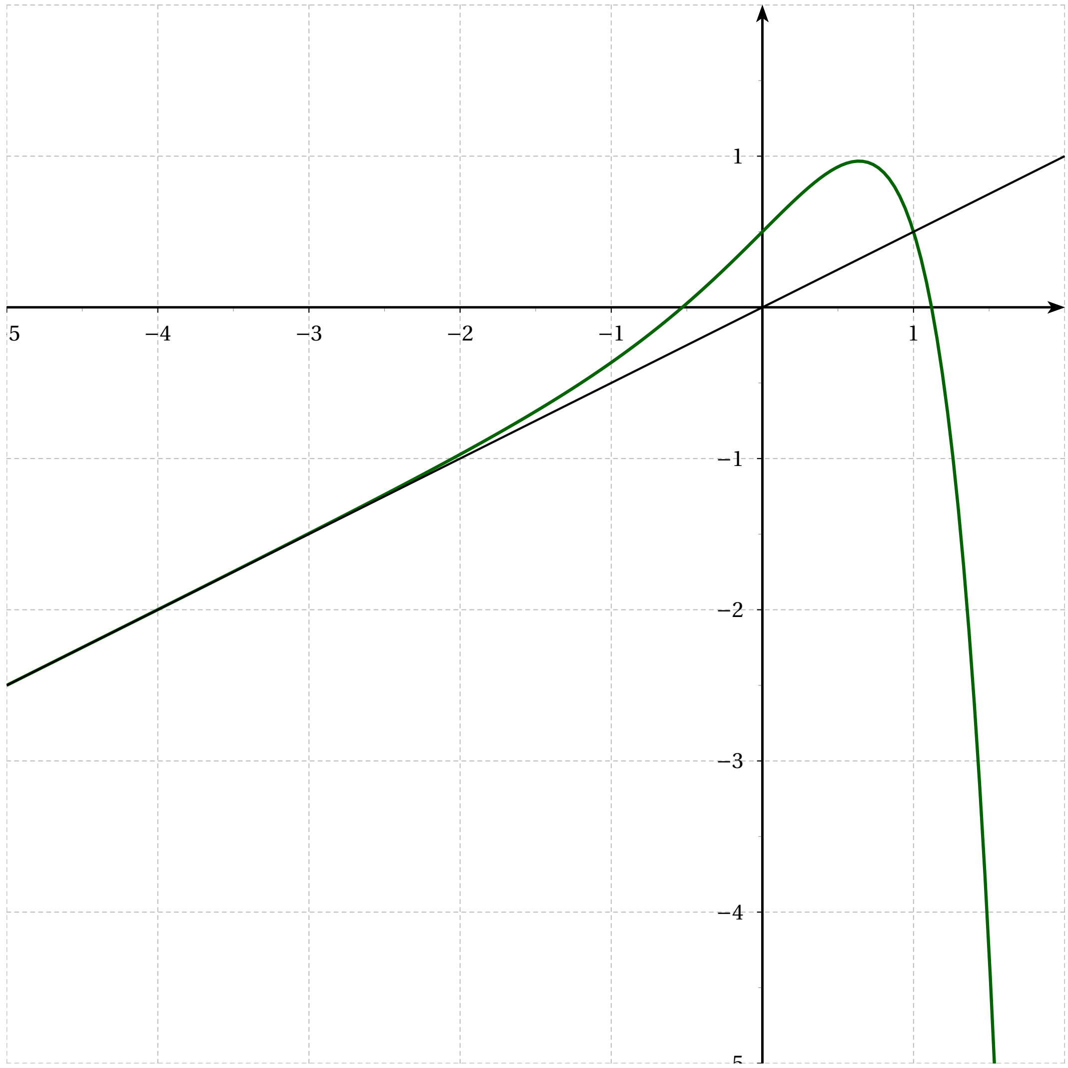
La calculatrice livre : $u(0,63) \approx 0,08$ et $u(0,64) \approx -0,007$. Donc d'après le théorème ci-dessus $0,63 < \alpha < 0,64$. Réponse $\alpha \approx 0,64$ à 10^{-2} près par excès.

c. Le tableau donne donc le signe de u : $x < \alpha \iff u(x) > 0$ et $x > \alpha \iff u(x) < 0$

4. On a $f'(x) = \dfrac{1}{2}u(x)$: le signe de f' est celui de u. On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$		$\searrow$	$-\infty$

5. Voici la courbe :



EXERCICE 2 **10 points**

1. Avec $a = 2,9$ il semble que la suite (u_n) soit décroissante et convergente vers 1.
Avec $a = 3,1$ il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. **a.** Les termes u_n et u_{n+1} ayant pour limite ℓ, on a donc $\ell = \dfrac{1}{2}\ell - \ell + \dfrac{3}{2}$.

b. $\ell = \dfrac{1}{2}\ell - \ell + \dfrac{3}{2} \iff 2\ell = \ell^2 - 2\ell + 3 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0$
1 est solution évidente de cette équation que l'on peut écrire $(\ell - 1)(\ell - 3) = 0$.
L'autre solution est donc $\ell = 3$.
Si elle converge cela ne peut être que vers 1 ou 3.

3. **a.** On prend $a = 2,9$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = x - 1$; donc $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$: la fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

b. *Initialisation* : $u_0 = 2,9$ et u_1 : $\dfrac{1}{2} \times 2,9^2 - 2,9 + \dfrac{3}{2} = 2,805$.
On a bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$:
puisque la fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, les images par f des trois termes de cet encadrement sont rangées dans le même ordre :
$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.
Soit avec $f(1) = \dfrac{1}{2} - 1 + \dfrac{3}{2} = 1$: $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n, il l'est aussi au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence on a donc démontré que :
pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

c. D'après le résultat précédent la suite (u_n) décroit et est minorée par 1 : elle est donc, d'après le théorème de la convergence monotone, convergente vers un nombre $\ell \geqslant 1$.
De plus $a = 2,9$ est le premier terme de la suite qui est décroissante, donc $\ell < 2,9$.
Les deux seules valeurs possibles pour la limite sont 1 et 3 (question 2.b.) ; ça ne peut pas être 3 donc $\ell = 1$.

4. **a.** Si la suite est majorée, comme elle est croissante, elle est convergente (théorème de la convergence monotone).
On a vu que si la suite converge ce ne peut être que vers 1 ou 3, ce qui n'est pas possible puisque le premier terme est $u_0 = 3,1 > 3$ et que la suite est croissante : cette suite n'est donc pas majorée.

b. Par conséquent on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c.

$P \leftarrow 0$
$U \leftarrow 3,1$
Tant que $U \leqslant 10^6$
$\quad P \leftarrow P + 1$
$\quad U \leftarrow \dfrac{1}{2}U^2 - U + \dfrac{3}{2}$
Fin Tant que

Rem. L'algorithme s'arrête à u_9.