DS 5 : 10 janvier 2019 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \text{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. • *Initialisation* : $u_0 = 1$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant \text{e}^2$.
   L'encadrement est vrai au rang 0.
   • *Hérédité* : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
   $1 \leqslant u_n \leqslant \text{e}^2$, on a donc par croissance de la fonction $\sqrt{}$, $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \text{e}$ ou encore $1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \text{e}$, puis par produit par e :
   $\text{e} \leqslant \text{e} \times \sqrt{u_n} \leqslant \text{e} \times \text{e}$ et *a fortiori* $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \text{e}^2$. L'encadrement est héréditaire.
   On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de la récurrence on a montré que pour tout naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \text{e}^2$.
2. **a.** Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \text{e}\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\text{e} - \sqrt{u_n}\right)$.
   Or on a d'une part $\sqrt{u_n} \geqslant 0$, et on a vu dans la question précédente que $\sqrt{u_n} < \text{e} \iff \text{e} - \sqrt{u_n} > 0$ donc finalement $\sqrt{u_n}\left(\text{e} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.
   b. La suite (u_n) est croissante et majorée par e^2 elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant \text{e}^2$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

   a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln\left(\text{e} \times \sqrt{u_n}\right) - 2 = \ln \text{e} + \ln\sqrt{u_n} - 2 =$
   $1 - 2 + \dfrac{1}{2}\ln u_n = \dfrac{1}{2}\ln u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(\ln u_n - 2) = \dfrac{1}{2}v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = \ln u_0 - 2 = 0 - 2 = -2$.
   b. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   c. Or $v_n = \ln(u_n) - 2 \iff \ln(u_n) = v_n + 2 = 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff u_n = \text{e}^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
   d. Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 2$ et enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \text{e}^2$.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2\,018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
Si $u_0 = 2\,018$, alors $u_1 = \text{e} \times \sqrt{2\,018} \approx 122,1 < u_0$.
L'affirmation est fausse.
Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \text{e}^2$. »
L'affirmation est vraie car l'initialisation de la récurrence est encore valable : $1 \leqslant u_0 \leqslant \text{e}^2$, donc l'encadrement est encore vrai.
Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »
La suite (u_n) est constante si et seulement si quel que soit n, $u_{n+1} = u_n \iff \text{e} \times \sqrt{u_n} = u_n \iff \text{e} \times \sqrt{u_n} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{u_n} \iff \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n}) = 0 \iff u_n = 0$ ou $\text{e} = \sqrt{u_n} \iff u_n = \text{e}^2$.
L'affirmation est fausse.

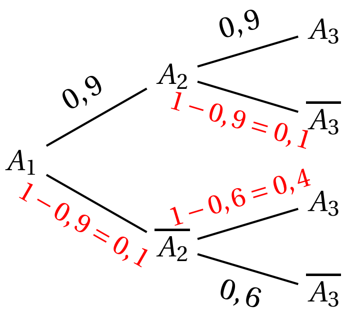
EXERCICE 2 **10 points**

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

~~4.~~ parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
– parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. **a.** On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines.

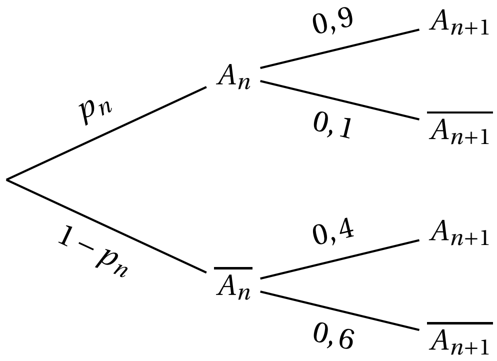


b. D'après la formule des probabilités totales :
$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right)$
$= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$
$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$

c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est :
$P_{A_3}(A_2) = \dfrac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \dfrac{0,9 \times 0,9}{0,85} \approx 0,95$.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines n et $n+1$:



D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + \left(1 - p_n\right) \times 0,4 = 0,5p_n + 0,4.$

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $p_n > 0,8$.

- **Initialisation**
  On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,8$; la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
  Soit un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k, c'est-à-dire $p_k > 0,8$. C'est l'hypothèse de récurrence.
  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k > 0,8$ donc $0,5p_k > 0,4$ et donc $0,5p_k + 0,4 > 0,8$ qui signifie $p_{k+1} > 0,8$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $k \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5p_n$.
Or $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n > 0,4$ donc $-0,5p_n < -0,4$ et donc $0,4 - 0,5p_n < 0$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est strictement décroissante.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$ donc la suite (p_n) est minorée par $0,8$.
On a vu aussi que la suite (p_n) était décroissante.
D'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (p_n) est convergente.

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$ donc $p_n = v_n + 0,8$.

a.
- $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n$
- $v_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,2$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0,8$, on en déduit que $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et $-1 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0. Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0,8$ donc la suite (p_n) est convergente et a pour limite $0,8$.