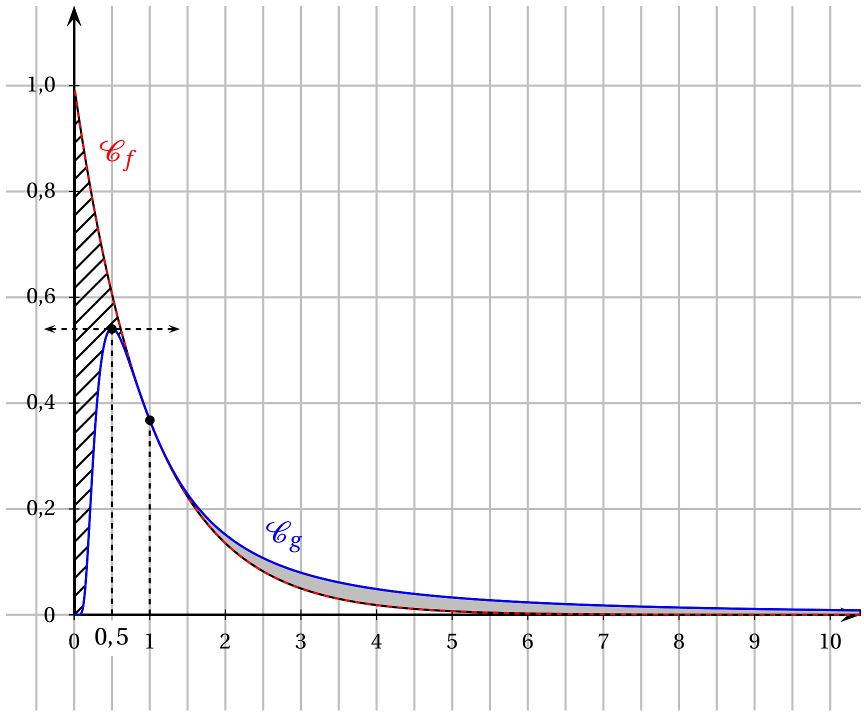
DS 6 : 7 mars 2019 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives. Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous :



Partie A – Conjectures graphiques

1. D'après le graphique, on peut dire qu'une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est $x = 1$.
2. D'après le graphique, on peut dire qu'une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est $x = 0,5$.

Partie B – Étude de la fonction g

1. On cherche la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{X\to 0} \mathrm{e}^X = 1 \end{array}\right\} \text{ donc } \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$$

On peut donc dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0~;~+\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \ln\left(g(x)\right)$.

   a. Pour tout nombre réel x strictement positif,
   $$h(x) = \ln\left(g(x)\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right) = -\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x} = -2\ln x - \frac{1}{x}$$
   $$= \frac{-1-2x\ln x}{x}.$$

   b. On calcule la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.
   On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$. On en déduit que
   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-1-2x\ln x\right) = -1$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{-1-2x\ln x}{x} = -\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$.

   c. Pour tout $x > 0$, $h(x) = \ln\left(g(x)\right)$ donc $g(x) = \mathrm{e}^{h(x)}$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{h(x)} = 0 \text{ ce qui veut dire que } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0.$$

3. Pour tout $x > 0$, la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
Pour tout $x > 0$, la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{-2x}{x^4}$.
Pour tout $x > 0$, la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
Donc pour tout $x > 0$, $g'(x) = \left(-\dfrac{2x}{x^4}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2} \times \left(\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(1-2x\right)}{x^4}$.

4. Sur $]0~;~+\infty[$, $x^4 > 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $1-2x$:
   - la fonction g est strictement croissante sur $]0~;~0,5]$;
   - la fonction g est strictement décroissante sur $[0,5~;~+\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. Soit A le point de coordonnées $\left(1~;~\mathrm{e}^{-1}\right)$.
$f(x_{\mathrm{A}}) = f(1) = \mathrm{e}^{-1} = y_{\mathrm{A}}$ donc le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
$g(x_{\mathrm{A}}) = g(1) = \dfrac{1}{1^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1}} = \mathrm{e}^{-1} = y_{\mathrm{A}}$ donc le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}_g$.
Donc le point A est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0~;~1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs.
La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ a pour primitive la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.
La fonction g est définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ de la forme $u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ d'après ce qui a été vu précédemment ; elle a donc pour primitive la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ c'est-à-dire $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

La fonction $(f-g)$ a donc pour primitive la fonction $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x &= \left[-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]_a^b = -\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}-\left(-\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}.\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente,

$$\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{\frac{-1}{1}} = \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

$$\lim_{a\to 0} \mathrm{e}^{-a} = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} -\frac{1}{a} = -\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} = 0$$

On peut donc déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} = 1$ et donc que $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x = 1-2\,\mathrm{e}^{-1}$.

4. On admet que $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \left(g(x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x$.
Sur l'intervalle $]0~;~1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ donc
$\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
C'est l'aire de la région hachurée sur le graphique.
Sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ donc
$\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \left(g(x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$, et les droites $x=1$ et $x=b$ quand b tend vers $+\infty$.
C'est l'aire de la région grisée sur le graphique.
On peut donc dire que ces deux aires sont égales.

EXERCICE 2 — 10 points

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}$.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - \mathrm{i}$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1. De $u_n = z_n - \mathrm{i}$, on déduit que $z_n = u_n + \mathrm{i}$.

$$u_{n+1} = z_{n+1} - \mathrm{i} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i} - \mathrm{i} = \frac{1}{3}\left(u_n+\mathrm{i}\right) - \frac{1}{3}\mathrm{i} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}\mathrm{i} - \frac{1}{3}\mathrm{i} = \frac{1}{3}u_n$$

2. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = v_0 - \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$.

On a donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = (1-\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3. **a.** Pour tout entier naturel n,
$\left|u_n\right| = \left|\left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i})\right| = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left|1-\mathrm{i}\right| = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b. $\left|z_n - \mathrm{i}\right| = \left|u_n\right| = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Or $-1 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{3}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0$.

c. z_n est l'affixe du point A_n, et i est l'affixe du point C ; donc $\left|z_n - \mathrm{i}\right| = \mathrm{A}_n\mathrm{C}$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|z_n - \mathrm{i}\right| = 0$ signifie que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{A}_n\mathrm{C} = 0$ ce qui veut dire que, lorsque n tend vers $+\infty$, le point A_n tend vers le point C.

4. **a.** Soit n un entier naturel.
$u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i})$ donc $\arg(u_n) = \arg(1-\mathrm{i})$

$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $1-\mathrm{i}$ a pour argument $-\dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que $\arg(u_n) = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ avec k entier relatif.

b. Les points B_n ont pour affixes les nombres u_n dont l'argument est constant à 2π près. Pour tout n, chaque point B_n appartient à la droite d'équation $y = -x$; donc tous les points B_n sont alignés.

c. $z_n = u_n + \mathrm{i} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i}) + \mathrm{i} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)\mathrm{i}$

Soit x la partie réelle de z_n et y sa partie imaginaire.
$x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $y = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ donc $y = 1 - x$.
On en déduit que $y = -x + 1$ et donc que le point A_n d'affixe z_n appartient à la droite d'équation $y = -x + 1$.