DS 8 : 2 mai 2019 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1 ; 1 ; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$, $P\left(1 ; 0 ; -\frac{5}{4}\right)$.

1. Voir la figure à la fin.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$. $\overrightarrow{MN}\left(-1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{MP}\ (0 ; -1 ; -2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. **a.** $-1 \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \left(\frac{1}{4}\right) \times (-2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

b. L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.

4.

5. **a.** Si n est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :

$5x - 8y + 4z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$;

$N \in (MNP) \iff -8 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 = d = \iff 0 = d$

Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x - 8y + 4z = 0$.

b. On traduit la relation vectorielle : $M(x ; y ; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{FM} = t\overrightarrow{n}$, $t \in \mathbb{R}$ soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-1 & = & 5t \\ y-0 & = & -8t \\ z-1 & = & 4t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+5t \\ y & = & -8t \\ z & = & 1+4t \end{array}\right.$$

6. **a.** Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 5x-8y+4z & = & 0 \\ x & = & 1+5t \\ y & = & -8t \\ z & = & 1+4t \end{array}\right. \Rightarrow 5(1+5t) - 8 \times (-8t) + 4(1+4t) = 0 \iff 105t + 9 = 0 \iff t = -\frac{9}{105} \iff t = -\frac{3}{35}.$$

D'où $x = 1 + 5 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$;

$y = -8 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \frac{24}{35}$;

$z = 1 + 4 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = 1 - \frac{12}{35} = \frac{23}{35}$.

Donc $F\left(\frac{4}{7} ; \frac{24}{35} ; \frac{23}{35}\right)$.

b. Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc

$V_{\text{MNPF}} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\text{MNP} \times \text{FK})$.

Or MNP est rectangle en M, donc $\mathscr{A}(\text{MNP} = \dfrac{\text{MN} \times \text{MP}}{2}$.

$\text{MN}^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{21}{16} \Rightarrow \text{MN} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$;

$\text{MP}^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{MP} = \sqrt{5}$;

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\dfrac{27}{35}} = \dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{21 \times 27}{35}} \times \sqrt{5} =$
$\dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{81}{5}} \times \sqrt{5} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$.

EXERCICE 2 **10 points**

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

1. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(98 \leqslant X \leqslant 102) \simeq 0,9545$ à 10^{-4} près.
2. Centrons et réduisons l'évènement afin d'obtenir l'intervalle équivalent portant sur la variable centrée réduite :

$$\begin{aligned} 98 \leqslant X \leqslant 102 &\iff 98 - 100 \leqslant X - 100 \leqslant 102 - 100 \\ &\iff \dfrac{-2}{\sigma} \leqslant \dfrac{X - 100}{\sigma} \leqslant \dfrac{2}{\sigma} \end{aligned}$$

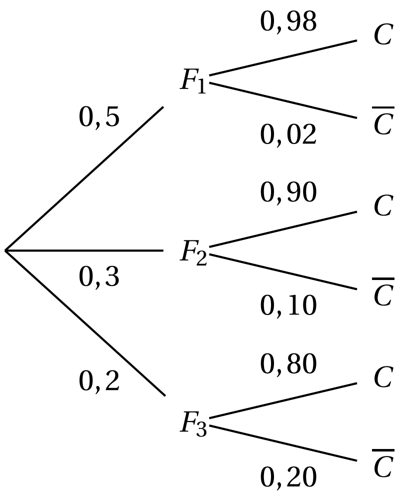
Posons $Z = \dfrac{X - 100}{\sigma}$. Nous savons que $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\ 1)$ et que $P\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 2P\left(Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) - 1$.

Cherchons u tel que $2P(Z \leqslant u) - 1 = 0,97$, soit $P(Z \leqslant u) = 0,985$. À la calculatrice, on obtient $u \simeq 2,1701$ à 10^{-4} près.

Ainsi, $\dfrac{2}{\sigma} = u$, ce qui donne $\sigma = \dfrac{2}{u} \simeq 0,9216$ à 10^{-4} près.

Partie B Contrôle à la réception

1. On cherche à déterminer $P_C(F_1) = \dfrac{P(C \cap F_1)}{P(C)}$.
   Faisons un arbre afin de modéliser la situation. On donne les probabilités à partir des hypothèses de l'énoncé.



Calculons $P(C)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

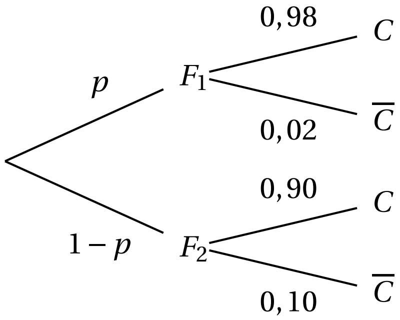
$$P(C) = P_{F_1}(C)P(F_1) + P_{F_2}(C)P(F_2) + P_{F_3}(C)P(F_3)$$

On obtient, après calcul, $P(C) = 0,92$.

D'autre part, $P(C \cap F_1) = P_{F_1}(C)P(F_1)$, ce qui donne, après calcul, $P(C \cap F_1) = 0,49$.

Finalement, on obtient $P_C(F_1) = \dfrac{0,49}{0,92} \simeq 0{,}532\,6$ à 10^{-4} près.

2. Faisons un arbre qui résume la nouvelle situation :

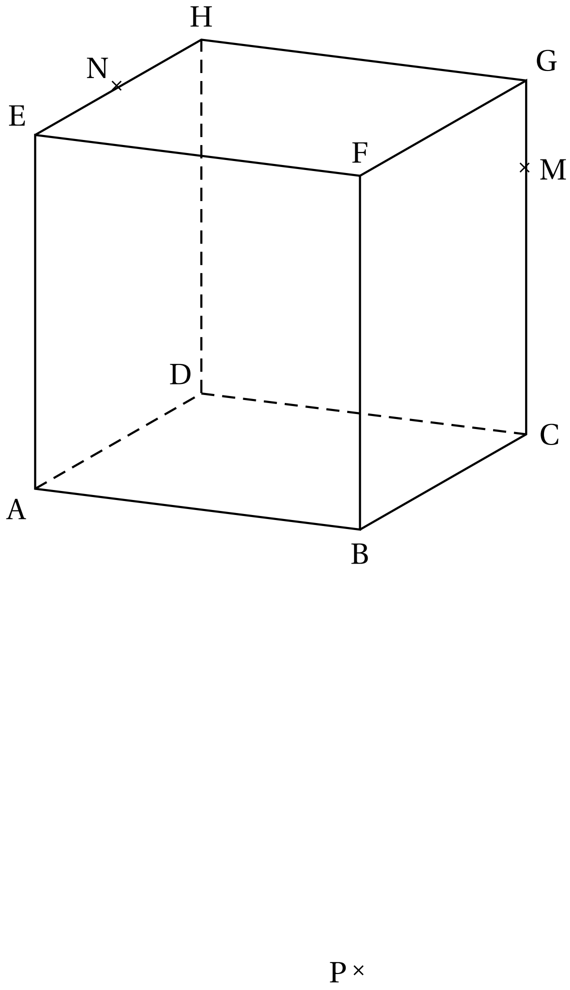


En reprenant la formule des probabilités totales, on cherche p tel que $P(C) = 0,92$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} 0,98p + 0,9(1-p) = 0,92 &\iff 0,08p = 0,02 \\ &\iff p = \frac{0,02}{0,08} = 0,25 \end{aligned}$$

L'entreprise doit donc acheter au minimum 25% de ses fèves au premier fournisseur.

ANNEXE



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
l prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2$
m prend la valeur $g^2 + h^2 + i^2$
Si $k = 0$ et si $l = m$
    Afficher : « Le triangle MNP est rectangle isocèle en M »
Sinon Afficher : « Le triangle MNP n'est pas rectangle ou n'est pas isocèle en M »