Corrigé DS n° 1

Exercice 1 **10 points**

Partie A :

1. *0,5 point* $P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = -2\mathrm{i}\sqrt{2}+4+2\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}-4-2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0 \iff \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a.** *1,5 points* Développons :
$\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) = z^3+az^2+bz-z^2\mathrm{i}\sqrt{2}-az\mathrm{i}\sqrt{2}-b\mathrm{i}\sqrt{2} = z^3+\left(a-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+\left(b-a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-b\mathrm{i}\sqrt{2}$.
Par identification avec l'énoncé, on obtient :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a-\mathrm{i}\sqrt{2} &=& -2-\mathrm{i}\sqrt{2}\\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2} &=& 2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} &=& -2\mathrm{i}\sqrt{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& -2\\ b+2\mathrm{i}\sqrt{2} &=& 2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\ -b &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& -2\\ b &=& 2\\ b &=& 2\end{array}\right.$$
On a donc $P(z) = \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)$

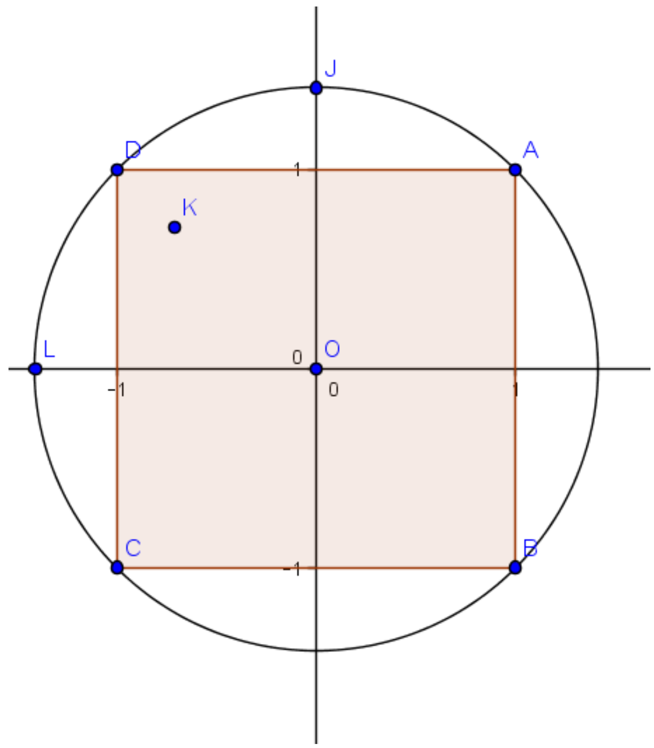
   b. *1,5 points* En utilisant la factorisation précédente :
$$P(z)=0 \iff \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-\mathrm{i}\sqrt{2} &=& 0\\ z^2-2z+2 &=& 0\end{array}\right.$$
On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$; résolution de l'équation du second degré :
$z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2-1+2=0 \iff (z-1)^2+1=0 \iff$
$(z-1)^2=-1 \iff (z-1)^2=\mathrm{i}^2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-1 &=& \mathrm{i}\\ z-1 &=& -\mathrm{i}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 1+\mathrm{i}\\ z &=& 1-\mathrm{i}\end{array}\right.$
Les solutions sont donc : $\mathrm{i}\sqrt{2}, \quad 1+\mathrm{i}, \quad 1-\mathrm{i}$.

Partie B :

1. **a.** *1 point* $|z_A| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
$cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$
On a donc $z_A = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

   b. *0,5 point* $z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. *0,5 point* Figure



3. *1,5 points* K est le milieu du segment [JL] ce qui se traduit en coordonnées par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{\text{K}} & = & \frac{1}{2}\left(x_{\text{J}}+x_{\text{L}}\right)\\ y_{\text{K}} & = & \frac{1}{2}\left(y_{\text{J}}+y_{\text{L}}\right)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -\frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{1}{2}\left(0+x_{\text{L}}\right)\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+y_{\text{L}}\right)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{\text{L}} & = & -\sqrt{2}\\ y_{\text{L}} & = & 0\end{array}\right.$$

Conclusion : $z_{\text{L}} = -\sqrt{2}$.

4. *1,5 points* On a $|z_{\text{A}}|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$|z_{\text{B}}|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$

$\left|z_{\text{J}}\right|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$|z_{\text{L}}|^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

On a donc OA = OB = OJ = OL = $\sqrt{2}$: les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et le rayon $\sqrt{2}$.

5. *1,5 points* $z_{\text{C}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} z_{\text{L}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right) = -1-\text{i}$. On a successivement : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = 0$ donc O est milieu de [BD] et [AC], donc ABCD est un parallélogramme ; AB=BC =CD =AD= 2, donc ABCD est un losange ; AC = BD = $2\sqrt{2}$ donc ABCD est un carré .

Exercice 2 — 10 points

1. **a.** *1,5 points* f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}\left(x^2-7\right)$ qui est du signe de x^2-7.

Donc $f'(x) = 0 \iff x^2 - 7 = 0 \iff \left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right) = 0 \iff x = \sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.

Il y a donc une solution dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: $\sqrt{7}$.
Le trinôme $x^2 - 7$ est positif sauf entre ses racines donc ici sur $\left]0\ ;\ \sqrt{7}\right[$.
Conclusion : f est décroissante sur $\left]0\ ;\ \sqrt{7}\right[$ puis croissante sur $\left]\sqrt{7}\ ;\ +\infty\right[$; donc $f\left(\sqrt{7}\right)$ est le minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. $f\left(\sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \dfrac{7}{\sqrt{7}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \sqrt{7}\right) = \sqrt{7}$.

b. *1 point* Initialisation : Vrai pour n = 0 Supposons que $u_n \geq \sqrt{7}$ pour un n donné . Alors , par ce qui précède , $f(u_n) \geq \sqrt{7}$ donc $u_{n+1} \geq \sqrt{7}$

2. **a.** *1,5 points* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{u_n} - u_n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7 - u_n^2}{u_n}\right)$.

Comme $\dfrac{1}{2} > 0$, $u_n > 0$ et que $u_n \geqslant \sqrt{7} \Rightarrow u_n^2 \geqslant 7 \Rightarrow u_n^2 - 7 \geqslant 0 \Rightarrow 7 - u_n^2 \leqslant 0$, on en conclut que

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

b. *0,5 point* Donc la suite (u_n) est décroissante.

c. *1 point* $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right) \iff 2\ell = \ell + \dfrac{7}{\ell} \iff \ell = \dfrac{7}{\ell} \iff \ell^2 = 7 \iff \ell = \sqrt{7}$ (puisque la limite est positive).

3. *1,5 points* $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n} - 2\sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n^2 + 7 - 2u_n\sqrt{7}}{u_n}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$. (identité remarquable)

4. **a.** *1,5 points* *Initialisation* : $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \approx 0,35$ et $d_0 = 1$.
On a bien $u_0 - \sqrt{7} \leqslant d_0$.
Hérédité :
Remarque préliminaire : on a démontré que $u_n \geqslant \sqrt{7}$, donc $u_n > 1$ ou encore $\dfrac{1}{u_n} < 1 \quad (2)$.
Supposons qu'il existe un naturel n tel que $u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n$.
On a démontré à la question 3 que :
$u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$. Donc comme $u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n \Rightarrow \left(u_n - \sqrt{7}\right)^2 \leqslant d_n^2$, l'égalité du 3 donne :
$u_{n+1} - \sqrt{7} < \dfrac{1}{2}d_n^2 \times \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{2}d_n^2$ d'après l'inégalité (2) ci-dessus.
Finalement $u_{n+1} - \sqrt{7} < \dfrac{1}{2}d_n^2 \iff u_{n+1} - \sqrt{7} < d_{n+1}$.
L'hérédité est établie.
Pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

b. *1,5 points* L'algorithme indique que pour que $d_n \leqslant 10^{-9}$ il faut que $n \geqslant 5$.
On a donc $d_5 \leqslant 10^{-9}$.
Comme $u_5 - \sqrt{7} < u_5$ c'est-à-dire $u_5 - \sqrt{7} < 10^{-9}$, on en déduit que u_5 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.