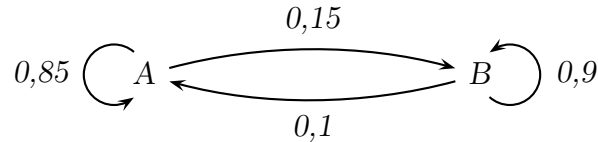


Exercice 1 (15 points)

1. La première énigme est facile, donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Donc $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Le graphe probabiliste :



3. La matrice M associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Puis $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$

4. Pour tout entier naturel n , on a $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$.

On pose $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$ et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a $P_{n+1} = P_n \times M$.

Donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85a_n + 0,1b_n & 0,15a_n + 0,9b_n \end{pmatrix}$

Donc $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1b_n = 0,85a_n + 0,1(1 - a_n) = 0,85a_n + 0,1 - 0,1a_n = 0,75a_n + 0,1$.

5. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = a_n - 0,4$.

(a) $v_{n+1} = a_{n+1} - 0,4 = 0,75a_n + 0,1 - 0,4 = 0,75a_n - 0,3$
 $= 0,75 \times \left(a_n - \frac{0,3}{0,75} \right) = 0,75 \times (a_n - 0,4) = 0,75v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de 1er terme $v_1 = a_1 - 0,4 = 1 - 0,4 = 0,6$.

(b) Donc pour tout entier naturel n , $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,6 \times 0,75^{n-1}$.

De plus pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - 0,4$ donc $a_n = v_n + 0,4$.

Donc $a_n = 0,6 \times 0,75^{n-1} + 0,4$.

Or $0,6 = 0,8 \times 0,75$ donc $a_n = 0,8 \times 0,75 \times 0,75^{n-1} + 0,4 = 0,8 \times 0,75^n + 0,4$.

- (c) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et $q \in]-1 ; 1[$ donc la limite de (v_n) lorsque n tend vers l'infini est égale à zéro.

- (d) Calculons à présent la limite de la suite (a_n) . Comme pour tout entier naturel n , $a_n = v_n + 0,4$, on peut en déduire que la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers l'infini est égale à $0,4$.

La probabilité d'obtenir une question facile sera donc de $0,4$, celle d'une question difficile sera de $0,6$; il y aura donc plus de chance d'avoir une question difficile plutôt qu'une question facile.

Exercice 2 (5 points)

Pour résoudre ce système , on va utiliser des matrices .

$$\text{Posons } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons } B = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit donc $AX = B \iff X = A^{-1}B$.

Ce qui donne : $x = 3$, $y = 2$ et $z = 1$