

Corrigé DS n°2

Exercice 1 5 points

Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix} \quad 2 \text{ points}$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 3 \text{ points}$$

Exercice 2 7 points

1) $2 \equiv 2[5]; 2^2 \equiv -1[5]; 2^4 \equiv 1[5]$ donc les restes dans la division par 5 sont : $2^{4k} \equiv 1[5], 2^{4k+1} \equiv 2[5], 2^{4k+2} \equiv 4[5], 2^{4k+3} \equiv 3[5]$ 2 points

2) $5 \equiv 5[7], 5^2 \equiv 4[7], 5^3 \equiv -1[7], 5^6 \equiv 1[7]$ donc les restes dans la division par 7 sont : $5^{6k} \equiv 1[7], 5^{6k+1} \equiv 5[7], 5^{6k+2} \equiv 4[7], 5^{6k+3} \equiv 6[7], 5^{6k+4} \equiv 2[7],$

$5^{6k+5} \equiv 3[7]$ 2 points

3) $2 \equiv 2[7]; 2^2 \equiv 4[7]; 2^3 \equiv 1[7]$ donc les restes dans la division par 7 sont : $2^{3k} \equiv 1[7], 2^{3k+1} \equiv 2[7], 2^{3k+2} \equiv 4[7]$ 1 point

4) $12 \equiv 2[5]$ donc $12^{1527} \equiv 2^{1527}[5] \equiv 2^{4 \times 381 + 3}[5] \equiv 3[5]$ par 1) 1 point

5) $19^{52} \times 23^{41} \equiv 5^{52} \times 2^{41}[7] \equiv 5^{6 \times 8 + 4} \times 2^{3 \times 13 + 2}[7] = 2 \times 4[7] \equiv 1[7]$ 1 point

Exercice 3 8 points

1) $u_0 = 2; u_1 = 10; u_2 = 48; u_3 = 250; u_4 = 1392; u_5 = 8050$ 2 points

2) On travaille modulo 2 : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0[2]$ donc u_n est pair 2 points

3) On travaille modulo 4 . n doit être entier pair non nul donc $n > 1$:

On a : $2^n \equiv 0[4]$ si $n \geq 2$; $3^2 \equiv 1[4]$ donc $3^n \equiv 1[4]$ pour tout n ;

$$6 \equiv 2[4] \text{ donc } 6^2 \equiv 0[4] \text{ et } 6^{2k} \equiv 0[4]$$

On a donc si n pair non nul , $u_n \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0[4]$ et u_n divisible par 4 si n est pair non nul 2 points

4) De façon évidente , puisque les éléments de E sont premiers , 4 n'appartient pas à E

Par la question 2) , u_n est pair donc divisible par 2 donc 2 appartient à E

5 divise $u_1 = 10$ donc 5 appartient à E

3 divise $u_2 = 48$ donc 3 appartient à E

7 divise $u_5 = 8050$ donc 7 appartient à E 2 points