corrigé contrôle suites de matrices

1. (a) D'après le texte, les acheteurs de la marque X le mois $n+1$ sont formés de 50 % des acheteurs de X le mois n donc $0,5x_n$, de 50 % des acheteurs de Y le mois n donc $0,5y_n$, et de 10 % des acheteurs de Z le mois n donc $0,1z_n$; on a donc $x_{n+1} = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n$.
   On admet que: $y_{n+1} = 0,4x_n+0,3y_n+0,2z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1x_n+0,2y_n+0,7z_n$.

   (b) D'après le texte, on peut dire que pour tout n, $x_n+y_n+z_n = 1$ donc $z_n = 1-x_n-y_n$.
   $$\begin{aligned}x_{n+1} &= 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1(1 - x_n - y_n)\\ &= 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1 - 0,1x_n - 0,1y_n = 0,4x_n + 0,4y_n + 0,1\\ y_{n+1} &= 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2(1 - x_n - y_n)\\ &= 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2 - 0,2x_n - 0,2y_n = 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2\end{aligned}$$

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

   On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

   Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

   (a) En faisant tourner l'algorithme donné dans le texte, pour $n = 1$ on entre une fois dans la boucle TANT QUE; on va donc appliquer une fois l'instruction U prend la valeur $A \times U + B$.
   La valeur de U en entrée de boucle est $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$, donc la valeur affichée en sortie est:
   $$U_1 = A \times U_0 + B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix}$$
   Pour $n = 3$, l'algorithme calcule successivement U_1 puis
   $U_2 = A \times U_1 + B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,317 \end{pmatrix}$ puis
   $U_3 = A \times U_2 + B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,317 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}$
   L'affichage obtenu pour $n = 3$ est $\begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}$.

   (b) Le mois de janvier correspond à $n = 0$, donc le mois d'avril correspond à $n = 3$.
   La matrice U_3 est la matrice $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}$
   Donc la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril est $x_3 = 0,3868$.

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

   (a) I est la matrice unité d'ordre 2 donc $I \times C = C$.
   $C = A \times C + B \iff I \times C - A \times C = B \iff (I - A) \times C = B \iff N \times C = B$

   (b) On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$.

   $N \times C = B \iff C = N^{-1} \times B \iff C = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \iff C = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix} \iff$

   $C = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} \times \frac{1}{10} + \frac{20}{23} \times \frac{2}{10} \\ \frac{10}{23} \times \frac{1}{10} + \frac{30}{23} \times \frac{2}{10} \end{pmatrix} \iff C = \begin{pmatrix} \frac{45}{230} + \frac{40}{230} \\ \frac{10}{230} + \frac{60}{230} \end{pmatrix} \iff C = \begin{pmatrix} \frac{85}{230} \\ \frac{70}{230} \end{pmatrix} \iff$
   $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

4. On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

   (a) $V_{n+1} = U_{n+1} - C = A \times U_n + B - C$; or la matrice C est définie par $C = A \times C + B$.
   Donc $V_{n+1} = A \times U_n + B - A \times C - B = A \times (U_n - C) = A \times V_n$

   (b) On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.

   > Remarque: ce résultat s'obtient en partant de l'égalité $V_{n+1} = A \times V_n$; on pourrait démontrer par récurrence que, pour tout n, $V_n = A^n \times V_0$ ce qui équivaut à $U_n - C = A^n \times (U_0 - C)$ ou encore $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.

   Le mois de janvier correspond à $n = 0$ donc le mois de mai correspond à $n = 4$. Les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai sont respectivement x_4, y_4 et z_4.
   On cherche donc U_4 qui donnera x_4 et y_4; puis on calculera $z_4 = 1 - x_4 - y_4$.
   À la calculatrice, on trouve: $U_4 = A^4 \times (U_0 - C) + C = \begin{pmatrix} 0,3794 \\ 0,30853 \end{pmatrix}$
   De plus, $1 - 0,3794 - 0,30853 = 0,31207$.
   Donc les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai sont respectivement $x_4 = 0,3794$, $y_4 = 0,30853$ et $z_4 = 0,31207$.