Corrigé du bac blanc

Exercice 1A :

1. Pour dériver $f(x) = x(1 - \ln x)^2$, on remarque qu'il s'agit d'un produit du type $u \times v$ où $u(x) = x$; $u'(x) = 1$ et $v(x) = (1 - \ln x)^2$ qui se dérive comme $(w^2)' = 2ww'$ d'où $v'(x) = 2(1 - \ln x) \times \dfrac{-1}{x}$.

   $$f'(x) = 1 \times (1 - \ln x)^2 + x \times 2(1 - \ln x) \times \frac{-1}{x} = 1 - 2\ln x + (\ln x)^2 - 2 + 2\ln x = (\ln x)^2 - 1 = \mathbf{(\ln x + 1)(\ln x - 1)}$$

2. On étudie séparément le signe de chaque facteur, pour cela on résout les inéquations :

   $$\begin{array}{cc} \ln x + 1 > 0 & \ln x - 1 > 0 \\ \ln x > -1 & \ln x > 1 \\ x > \mathrm{e}^{-1} & x > \mathrm{e} \end{array}$$

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$\ln x + 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$4\mathrm{e}^{-1}$	↘	0	↗	$+\infty$

   En effet $f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}(1 - \ln(\mathrm{e}^{-1}))^2 = \mathrm{e}^{-1}(1 - (-1))^2 = 4\mathrm{e}^{-1}$ et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}(1 - \ln e)^2 = \mathrm{e}(1 - 1)^2 = 0$.

3. **a.** On conjecture qu'il y a **deux tangentes** à la courbe Γ parallèles à la droite d'équation $y = x$.

   b. Une droite est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si elle a le même coefficient directeur, c'est-à-dire 1. Or le coefficient directeur d'une tangente est égal au nombre dérivé, ainsi la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $\boldsymbol{f'(a) = 1}$. On résout donc l'équation :

   $$\begin{array}{c} (\ln a)^2 - 1 = 1 \\ (\ln a)^2 = 2 \\ \ln a = -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \ln a = \sqrt{2} \\ a = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad a = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \end{array}$$

   Il y a donc bien deux tangentes à Γ parallèles à la droite d'équation $y = x$, ce sont celles aux **points d'abscisse** $\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0,24$ et $\mathrm{e}^{\sqrt{2}} \approx 4,11$

4. La fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, pour étudier la convexité de cette fonction on étudie le signe de la dérivée seconde $f''(x) = 2 \times \ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$. Comme 2 et x sont positifs sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f''(x)$ dépend de celui de $\ln x$. On en déduit que **sur** $]\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1}]$, $f''(x) \leq 0$ donc f est **concave** et **sur** $[\mathbf{1}\,;\,+\infty[$, $f''(x) \geq 0$ donc f est **convexe**. De plus f'' ne s'annule qu'en $x = 1$ donc la courbe Γ admet un **point d'inflexion, le point d'abscisse 1**.

5. La tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$ où $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$. on obtient alors l'équation $y = 1 - (x - 1)$ ou encore $\boldsymbol{T : y = -x + 2}$.

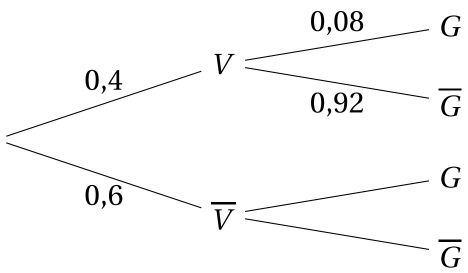
   Sur $]\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1}]$ la fonction f est concave donc **la courbe** Γ **est en-dessous de** toutes ses tangentes et notamment de **la tangente T**.

   Sur $[\mathbf{1}\,;\,+\infty[$ la fonction f est convexe donc **la courbe** Γ **est au-dessus de** toutes ses tangentes et notamment de **la tangente T**.

Exercice 1B : Partie A

1. **a.** 20 % de la population a contracté la grippe donc $\boldsymbol{P(G) = 0,2}$.

   b. Il ne fallait pas donner de probabilité aux deux dernières branches de l'arbre car on ne les trouvera que dans la suite de l'exercice.



2. $P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = \mathbf{0,032}$.
3. On cherche à démontrer que $P_{\overline{V}}(G) = 0,28$. Pour cela on utilise la formule de probabilité totale :

$$P(G) = P(V \cap G) + P\left(\overline{V} \cap G\right) = P(V) \times P_V(G) + P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(G)$$

$$0,2 = 0,032 + 0,6 \times P_{\overline{V}}(G)$$

$$P_{\overline{V}}(G) = \frac{0,2 - 0,032}{0,6} = \mathbf{0,28}$$

4. On cherche la probabilité que la personne n'ait pas été vaccinée sachant qu'elle a la grippe :

$$P_G\left(\overline{V}\right) = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P(G)} = \frac{0,6 \times 0,28}{0,2} = \mathbf{0,84}$$

Partie B

1. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli avec comme succès : la personne interrogée est vaccinée contre la grippe ($p = 0,4$) et échec : elle n'est pas vaccinée ($q = 1 - p = 0,6$), répétée $n = 40$ fois de façon identique et indépendante et la variable aléatoire X compte le nombre de succès : le nombre de personnes vaccinées. Donc X suit la **loi binomiale** de paramètres $\boldsymbol{n = 40}$ et $\boldsymbol{p = 0,4}$.
2. $P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{40-15} \approx \mathbf{0,123}$. On pouvait aussi utiliser la calculatrice et la fonction : binomFdp(40 , 0.4 , 15).
3. Au moins la moitié des personne interrogée représente au moins 20 personnes, on calcule donc $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$. Pour cela on utilise la fonction binomFRép(40 , 0.4 , 19) : $P(X \geq 20) \approx 1 - 0,870 \approx \mathbf{0,130}$.

Exercice 2 :

1. La hauteur de l'arc de chaînette est $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\right)$ et sa largeur est $2x$, ainsi le problème se ramène à résoudre l'équation : $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\right) = 2x \iff \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 4x \iff \boldsymbol{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0}$.
2. **a.** Pour tout $x > 0$, x est non nul, on développe alors : $x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2 = \mathrm{e}^x - 4x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = f(x)$ ce qui prouve bien l'égalité.

   b. D'après le théorème de croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) = +\infty$.

   Par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} - 2 = -2$.

   On peut alors conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. Selon la formule $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, la dérivée de e^{-x} est $-\mathrm{e}^{-x}$ donc :

$$\boldsymbol{f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 4}$$

b. $f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 4 = 0 \iff \mathrm{e}^x \times (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 4) = \mathrm{e}^x \times 0 \iff \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^0 - 4\mathrm{e}^x = 0$.
Ainsi on a bien $f'(x) = 0 \iff (\mathrm{e}^x)^2 - 4\mathrm{e}^x - 1 = 0$.

c. En posant $X = \mathrm{e}^x$, l'équation ci-dessus se ramène à $X^2 - 4X - 1 = 0$ qui est une équation du second degré. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 1\times(-1) = 20$, il y a donc deux racines réelles $X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5}$ et $X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-\sqrt{20}}{2\times 1} = \frac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2-\sqrt{5}$.
En reprenant l'égalité $X = \mathrm{e}^x$ cela donne : soit $\mathrm{e}^x = 2+\sqrt{5}$ et donc $x = \ln(2+\sqrt{5})$, soit $\mathrm{e}^x = 2-\sqrt{5}$ ce qui est impossible car une exponentielle est toujours positive alors que $2-\sqrt{5} < 0$.
Le problème n'a donc qu'une seule solution qui est $\boldsymbol{x = \ln(2+\sqrt{5})}$.

4. a. $f(0) = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 - 4\times 0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ et $f(\ln(2+\sqrt{5})) \approx -3{,}3$.

x	0	$\ln(2+\sqrt{5})$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\searrow$	$f(\ln(2+\sqrt{5}))$	$\nearrow$ $+\infty$

b. — Sur $]0\,;\ln(2+\sqrt{5})[$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
— Sur $[\ln(2+\sqrt{5})\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante.
0 est compris entre $f(\ln(2+\sqrt{5})) \approx -3{,}3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\ln(2+\sqrt{5})\,;+\infty[$ et donc sur $]0\,;+\infty[$.

5. a. Il s'agit d'un algorithme de dichotomie :

m	a	b	$b-a$	$f(m)$
	2	3	1	
2,5	2	2,5	$0{,}5 > 0{,}1$	$\approx 0{,}26 > 0$
2,25	2,25	2,5	$0{,}25 > 0{,}1$	$\approx -1{,}4 < 0$
2,375	2,375	2,5	$0{,}125 > 0{,}1$	$\approx -0{,}66 < 0$
2,4375	2,4375	2,5	$0{,}0625 < 0{,}1$	$\approx -0{,}22 < 0$

A la fin de l'algorithme $\boldsymbol{a = 2{,}4375}$ et $\boldsymbol{b = 2{,}5}$.

b. Grâce à cet algorithme, on obtient un encadrement de la solution α de l'équation $f(x) = 0$:
$\boldsymbol{2{,}4375 < \alpha < 2{,}5}$

Exercice 3 :

1. Réponse **b**. Par convention $0! = 1$.
2. Réponse **b**. Le nombre de k-listes d'éléments d'un ensemble de cardinal p est p^k.
3. Réponse **b**. $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \dfrac{n}{2!(n-2)!}$.
4. Réponse **c**. L'expérience se ramène à placer 5 croix dans 10 cases car ensuite on place les ronds dans les cases restantes, il s'agit du nombre de combinaisons de 5 éléments dans un ensemble de 10 éléments.
5. Réponse **b**. Il faut trouver le nombre de façon d'ordonner 8 éléments, il s'agit du nombre de permutations d'un ensemble de 8 éléments soit **8!** $= 40\,320$.
6. Réponse **c**. Il s'agit du produit cartésien entre l'ensemble des 3-listes d'éléments de l'ensemble $\{0;1;\ldots;9\}$ de cardinal 10 avec l'ensemble des 2-listes d'éléments de l'ensemble $\{A;B;C;D\}$ de cardinal 4. Le nombre de digicodes est donc $\boldsymbol{10^3 \times 4^2} = 16\,000$.

Exercice 4 :

Partie A

1. f est de la forme $30\ln(u)$ où $u(x) = \frac{20x}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0~;~1[$. f est donc dérivable sur $]0~;~1[$ et $f = 30\ln(u)$ donne $f' = 30 \times \frac{u'}{u}$ où $u = \frac{v}{w}$ donc $u' = \frac{v'w-vw'}{w^2}$ avec $\begin{cases} v(x) = 20x & v'(x) = 20 \\ w(x) = 1-x & w'(x) = -1 \end{cases}$ alors $u'(x) = \dfrac{20(1-x)+20x}{(1-x)^2} = \dfrac{20}{(1-x)^2}$

$$f'(x) = 30 \times \frac{20}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{20x} = \frac{30}{x(1-x)} > 0$$

f est donc **strictement croissante** sur $]0~;~1[$

2. $f(x) = 20 \iff \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = \dfrac{2}{3} \iff \dfrac{20x}{1-x} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \iff x\left(20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \iff x = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}{20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}} = \alpha \approx 0,09.$

$f(x) = 120 \iff \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) = 4 \iff \dfrac{20x}{1-x} = \mathrm{e}^4 \iff x\left(20+\mathrm{e}^4\right) = \mathrm{e}^4 \iff x = \dfrac{\mathrm{e}^4}{20+\mathrm{e}^4} = \beta \approx 0,73.$

f étant strictement croissante, $f(x) \in [20~;~120] \iff x \in [\alpha~;~\beta]$ Donc le diamètre d'un tronc est **entre 9 et 73 cm**.

Partie B

1. **a.** Il s'agit de la **croissance moyenne annuelle** en mètres entre les âges de **70 et 80 ans** :

$$\frac{18,05-15,6}{10} = \frac{2,45}{10} = \mathbf{0,245}$$

b. La formule à taper dans la cellule C3 est : **= (C2 − B2) ÷ (C1 − B1)**.

2. Il faut d'abord déterminer l'âge de l'épicéa : $f(0,27) = 30\ln\left(\frac{5,4}{0,73}\right) \approx 60$. Un épicéa de 60 ans devrait mesurer $11,2+10\times 0,22 = \mathbf{13,40}$ **mètres** si on considère qu'entre 50 et 70 ans la croissance moyenne est de 0,22 m par an.

Exercice 5 :

1. $u_1 = \dfrac{1\times 3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{2\times 4}{3^2} = \dfrac{8}{9}$ donc $v_2 = u_1 \times u_2 = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$; $v_3 = v_2 \times u_3 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3\times 5}{4^2} = \mathbf{\dfrac{5}{8}}$.

2. On complète l'algorithme ainsi :

	Algorithme
1.	$V \leftarrow 1$
2.	Pour i variant de 1 à n
3.	$\quad U \leftarrow \dfrac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i}+2)}{(\boldsymbol{i}+1)^2}$
4.	$\quad V \leftarrow \boldsymbol{V \times U}$
5.	Fin Pour

3. **a.** On a, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

b. De par sa définition u_n quotient de deux termes supérieurs à 0 est supérieur à 0.

D'après la question précédente comme $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$, soit $u_n < 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion : pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

4. **a.** Quel que soit $n > 0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_1 \times \ldots \times u_n \times u_{n+1}}{u_1 \times \ldots \times u_n} = u_{n+1}$.

Or d'après la question précédente $u_{n+1} < 1$, donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, et comme v_n est positif, $v_{n+1} < v_n$ donc la suite (v_n) est **décroissante**.

b. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 ; d'après le théorème de la convergence monotone, elle est **convergente** vers un réel supérieur ou égal à zéro.

5. **a.** $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.

b. Soit la propriété : $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

- *Initialisation*

$v_1 = u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1+2}{2\times 2} = \dfrac{3}{4}$: la relation est vraie au rang 1.

- *Hérédité*

Supposons que $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ est vraie pour un certain entier $n \geq 1$ et démontrons que $v_{n+1} = \dfrac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)} = \dfrac{n+3}{2(n+2)}$. D'après la question précédente :

$v_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+3}{2(n+2)}$;

la relation est encore vraie au rang $n+1$.

- *Conclusion*

La relation $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul n.

c. Puisque $n \neq 0$, on peut écrire $v_n = \dfrac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par somme et quotient de limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2\times 1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

6. On a $w_1 = \ln(u_1) = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$;

$w_7 = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_7) = \ln(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_7) = \ln(v_7)$.

Puis, d'après le résultat de la question **5.b.** :

$$w_7 = \ln\left(\frac{7+2}{2(7+1)}\right) = \ln\left(\frac{9}{16}\right) = \ln\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) = 2w_1$$