Baccalauréat blanc de Mathématiques

Durée 4 heures

La calculatrice est autorisée

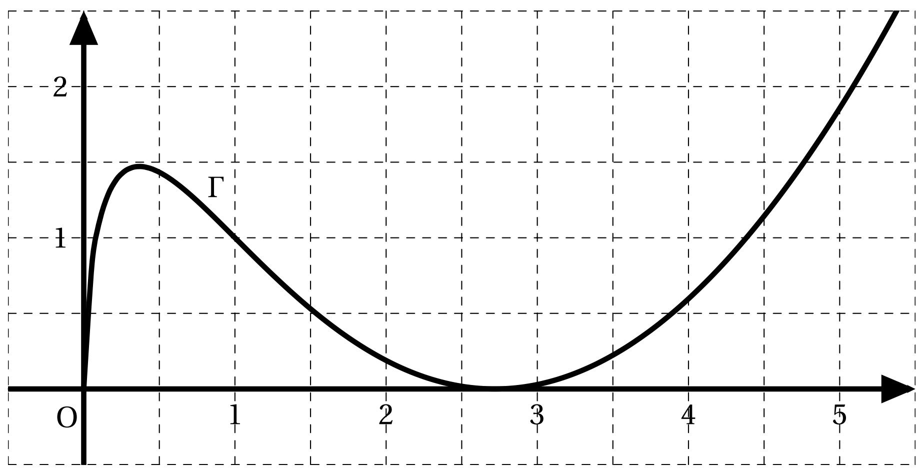
Le premier exercice est au choix. Chaque élève écrira au début de sa copie s'il choisit l'exercice 1A ou l'exercice 1B, il traitera alors l'exercice indiqué et ne traitera pas l'autre. Les exercices 2 à 5 sont obligatoires.

Exercice 1A au choix. Thèmes abordés : dérivabilité et convexité. **4 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

On notera Γ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé, elle est représentée ci-dessous.



1. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$$

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle et que la limite en $+\infty$ est égale à $+\infty$).

3. **a.** Conjecturer le nombre de tangentes à la courbe Γ qui sont parallèles à la droite D d'équation $y = x$.

b. Démontrer cette conjecture et préciser les abscisses des points de la courbe Γ où la tangente est parallèle à la droite D.

4. Étudier la convexité de la fonction f et justifier que cette fonction admet un point d'inflexion en un réel x_0 que l'on déterminera.

5. Calculer l'équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 1 puis déterminer la position relative de T et de Γ.

Exercice 1B au choix. Thème abordé : probabilités. **4 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

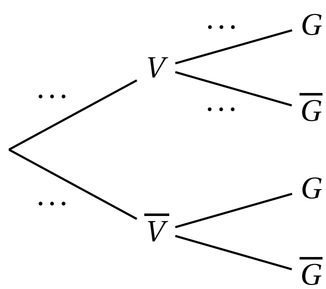
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'évènement G.

   b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.
4. Une personne est grippée, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas été vaccinée ?

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard 40 habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à 40 tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les 40 interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des personnes interrogées soient vaccinées.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

Exercice 2 **5 points**

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

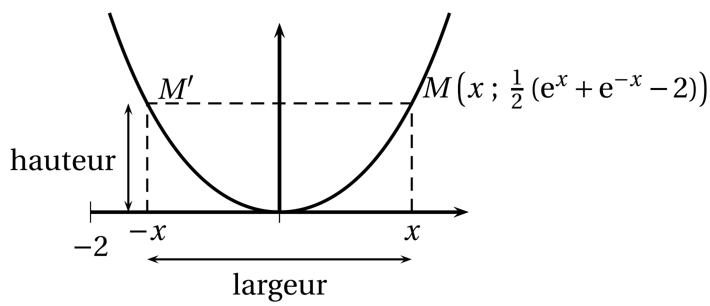
$$y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.

On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2} - 4\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

c. En posant $X = \mathrm{e}^{x}$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

a. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
        m ← (a + b)/2
        Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
                b ← m
        Sinon :
                a ← m
        Fin Si
Fin Tant que
```

a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-dessous avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5	...	...	...
...	...	...	...
...			

b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

Exercice 3 **3 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q. C. M.), les six questions sont indépendantes.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. ***Aucune justification n'est demandée****. Une réponse exacte rapporte un demi point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. Le nombre 0 ! :

a. est égal à 0 **b.** est égal à 1 **c.** n'est pas défini

2. Le nombre de listes de k éléments distincts ou non dans un ensemble de p éléments est égal à :

a. k^p **b.** p^k **c.** $\binom{p}{k}$

3. L'expression $\dfrac{n\,!}{2\,!\,(n-2)\,!}$ est égal à :

a. 6 **b.** $\binom{n}{n-2}$ **c.** $n(n-1)$

4. On place 5 croix et 5 ronds dans une liste de 10 cases. De combien de manières différentes peut-on placer ces éléments :

a. 5^{10} **b.** 10^5 **c.** $\binom{10}{5}$

5. Dans un meeting d'athlétisme, la finale de saut en longueur met aux prises huit athlètes ; il n'y a pas d'ex-æquo. Combien existe-t-il de classements possibles ?

a. 256 **b.** 40 320 **c.** 16 777 216

6. L'entrée d'un immeuble est commandée par un appareil à digicodes qui possède 10 chiffres et 4 lettres. Un digicode comporte cinq éléments : trois chiffres puis deux lettres. Le nombre de digicodes possibles est égal à :

a. $\binom{10}{3} \times \binom{4}{2}$ **b.** $3^{10} \times 2^4$ **c.** 16 000

Exercice 4 **3 points**

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.
L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à $1,30$ m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1. **a.** Interpréter le nombre $0,245$ dans la cellule D3.

   b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à $1,30$ m du sol vaut 27 cm.

Exercice 5 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

La suite (v_n) est définie par :
$v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 \times u_2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$.

1. Vérifier que l'on a $v_2 = \dfrac{2}{3}$ puis calculer v_3.

2. On considère l'algorithme incomplet ci-contre. Recopier et compléter sur la copie cet algorithme afin que, après son exécution, la variable V contiennent la valeur v_n où n est un nombre entier naturel non nul définie par l'utilisateur.
Aucune justification n'est attendue.

	Algorithme
1.	$V \leftarrow 1$
2.	Pour i variant de 1 à n
3.	$\quad U \leftarrow \dfrac{\ldots(\ldots+2)}{(\ldots+1)^2}$
4.	$\quad V \leftarrow \ldots$
5.	Fin Pour

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n < 1$.

4. **a.** Montrer que la suite (v_n) est décroissante

b. Justifier que la suite (v_n) est convergente (on ne demande pas de calculer sa limite).

5. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

6. On considère la suite (w_n) définie par
$w_1 = \ln(u_1)$, $w_2 = \ln(u_1) + \ln(u_2)$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, par

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_n).$$

Montrer que $w_7 = 2w_1$.