

Exercice 1 (7 points)

1. Déterminer une primitive de

(a) $f(x) = 2x + 5$

$$F(x) = x^2 + 5x$$

(b) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x$

$$F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2$$

(c) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5}$

$$F(x) = \ln(x^2 - 5)$$

(d) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$

$$F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$$

2. Déterminer une primitive $F(x)$ de $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$ telle que $F(0) = 5$

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + k \text{ et } k = 5$$

3. Soit $F(x) = (ax + b)e^{4x-3}$.

Déterminer a et b tels que F soit une primitive de $f(x) = (12x + 23)e^{4x-3}$

$F'(x) = (a + 4ax + 4b)e^{4x-3}$ donc par identification $4a = 12$ et $a + 4b = 23$ donc $a = 3$ et $b = 5$

Exercice 2 (5 points)

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 5y = 0$

$$y = ke^{5x} \text{ avec } k \text{ réel}$$

2. Déterminer y telle que $y' - 4y = 0$ et $y(0) = 5$

$$y = ke^{4x} \text{ et } k = 5$$

3. Résoudre l'équation différentielle : $2y' - 4y + 5 = 0$

$$y' = 2y - \frac{5}{2} \text{ donc } y = \frac{5}{4} + ke^{2x} \text{ avec } k \text{ réel}$$

4. Déterminer y telle que : $3y' - 4y + 8 = 0$ et $y(0) = 4$

$$y' = \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} \text{ donc } y = 2 + ke^{\frac{4}{3}x} \text{ et } 2 + k = 4 \text{ donc } k = 2$$

Exercice 3 (8 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = x \ln x + 1$ sur $]0; +\infty[$

1. Déterminer la limite de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ par croissance comparée donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Calculer la dérivée de f

$$f'(x) = \ln x + 1$$

4. Dresser le tableau de variations de f

$$\ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		−	+
$f(x)$	1	$1 - e^{-1}$	$+\infty$

5. Montrer qu'il existe un unique a tel que $f(a) = 5$. Donner un encadrement à 0,01 près de a .

La fonction f est continue, strictement croissante sur $]e^{-1}; +\infty[$ et $5 \in]1 - e^{-1}; +\infty[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique a tel que $f(a) = 5$

$$3,32 < a < 3,33.$$

6. Etudier la convexité de f .

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ donc } f \text{ est convexe}$$