DS 3 maths complémentaires terminale 4 février 2021

Exercice 1 (10 points)

Partie A

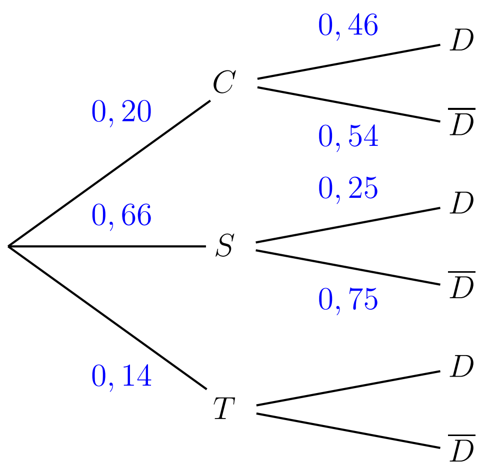
Une scierie produit des planches en chêne, en sapin ou en bois de hêtre pour fabriquer des parquets massifs. Il existe deux qualités de planche : les planches déclassées (de moins bonne qualité) et les planches de premier choix (de qualité supérieure).

On sait que:
- *20 % des planches produites sont en chêne,*
- *66 % des planches sont en sapin,*
- *les autres sont en bois de hêtre.*

De plus, 46 % des planches en chêne sont déclassées et 25 % des planches en sapin sont déclassées.

1. (a)
   - 20 % des planches produites sont en chêne, donc $p(C) = 0,20$.
   - 46 % des planches en chêne sont déclassées, donc $p_C(D) = 0,46$.
   - 25 % des planches en sapin sont déclassées, donc $p_S(D) = 0,25$.

   (b) On représente la situation par l'arbre suivant:



2. La probabilité que la planche soit en chêne et déclassée est $p(C \cap D) = p(C) \times p_C(D) = 0,20 \times 0,46 = 0,092$.

3. On sait que la scierie produit 32 % de planches déclassées, donc $p(D) = 0,32$.

   D'après la formule des probabilités totales: $p(D) = p(C \cap D) + p(S \cap D) + p(T \cap D)$.

   $p(D) = 0,32$, $p(C \cap D) = 0,092$ et $p(S \cap D) = 0,66 \times 0,25 = 0,165$

   Donc $0,32 = 0,092 + 0,165 + p(T \cap D)$ et donc $p(T \cap D) = 0,32 - 0,092 - 0,165 = 0,063$.

Partie B

On choisit un lot de 10 planches au hasard, et on suppose que le nombre de planches déclassées dans ce lot peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,32$.

1. $p(X = 4) = \approx 0,218$

   La probabilité qu'il y ait exactement 4 planches déclassées dans un lot de 10 est $0,218$.

2. *Pour calculer la probabilité $p(X \geqslant 1)$ qu'au moins une planche du lot soit déclassée, on passe par l'événement contraire: aucune planche n'est déclassée*

   $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,32)^{10} \approx 0,979.$

Exercice 2 (10 points)

1. *On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle [1 ; 4].*

   (a) *Pour tout x appartenant à l'intervalle [1 ; 4], on a :* $f'(x) = -2x + 4 + \dfrac{6}{x} = \dfrac{-2x^2 + 4x + 6}{x}$.

   (b) *Sur l'intervalle [1 ; 4], $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 4x + 6$.*

   $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 64 = 8^2$

   Le trinôme $-2x^2 + 4x + 6$ a deux racines:

   $x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - 8}{2 \times (-2)} = 3$ *et* $x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + 8}{2 \times (-2)} = -1 \notin [1\ ;\ 4].$

   Le trinôme $-2x^2 + 4x + 6$ est du signe de $a = -2$ donc négatif à l'extérieur des racines.

   D'où le signe de $f'(x)$:

x	1		3		4
$-2x^2 + 4x + 6$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   (c) $f(1) = -2$, $f(3) = -2 + 6\ln(3) \approx 4,592$ *et* $f(4) = -5 + 6\ln(4) \approx 3,318$

   On établit le tableau de variation de f sur l'intervalle [1 ; 4]:

x	1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$4,592$	$\searrow$	$3,318$

2. (a) *On place la valeur 0 dans le tableau de variation de f:*

x	1	α		3		4
$f(x)$	-2	0	$\nearrow$	$4,592$	$\searrow$	$3,318$

Cela prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [1 ; 4] et que cette solution est dans [1 ; 3].
À la calculatrice, on trouve que $f(1,28) \approx -0,037 < 0$ et $f(1,29) \approx 0,024 > 0$ donc
$\alpha \in [1,28\ ;\ 1,29]$.

(b) *On en déduit le signe de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 4]:*

x	1		α		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	