DS 1 spécialité maths terminale septembre 2020

Exercice 1 (10 points)
On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$. On cherche à déterminer la position du point de la parabole le plus proche de A .
Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$ d'abscisse x .

1. *Déterminer AM^2 en fonction de x*
2. *On note $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{29}{16}$. Calculer $f'(x)$*
3. *Déterminer a , b et c réels tels que $f'(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$*
4. *En déduire les variations de f .*
5. *Répondre au problème posé .*
6. *On note T_M la tangente à $\mathcal{P}$ au point M .*
   (a) *Déterminer l'équation de la tangente T_B à $\mathcal{P}$ au point $B(1; 1)$*
   (b) *Montrer que (AB) et T_B sont perpendiculaires .*

Exercice 2 (10 points)
Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) *Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.*
   (b) *Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.*
2. (a) *Démontrer que pour tout entier naturel n,*

$$u_n \leqslant n + 3.$$

   (b) *Démontrer que pour tout entier naturel n,*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

   (c) *En déduire une validation de la conjecture précédente.*
3. *On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.*
   (a) *Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.*
   (b) *En déduire que pour tout entier naturel n,*

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

(c) *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

4. *Pour tout entier naturel non nul* n, *on pose:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

(a) *Exprimer* S_n *en fonction de* n.

(b) *Déterminer la limite de la suite* (T_n).