DS 2 Terminale octobre 2020

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **8 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x + (1-x)\mathrm{e}^{2x}\right].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique 2 cm)

1. **a.** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.

   a. Étudier le sens de variation de u.
   Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.
   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

   b. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.
5. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$

EXERCICE 2 **8 points**

Partie A

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite $\left(p_n\right)$ définie pour tout entier naturel n, par

$$p_n = n^2 - 42n + 4.$$

   Affirmation 1 : La suite $\left(p_n\right)$ est strictement décroissante.
2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
   - $U_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
   - $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

   Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.
3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,

$$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n.$$

   Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}.$$

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$U_n = \frac{2^n}{1+2^n}.$$

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
$u \leftarrow \frac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $\quad u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ $\quad i \leftarrow i+1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \frac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $\quad u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

Exercice 3 **4 points**

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

1. $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$

2. $5n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$