DS 3 Terminale 19 novembre 2020

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.

Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $u_0 = 280$.

On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 420$.

  a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.

  b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n puis montrer que $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.

On souhaite utiliser l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
U ← 280
Tant que .........
        N ← N + 1
        U ← .........
Fin Tant que
```

  a. Recopier et compléter l'algorithme.

  b. Quelle est la valeur de N à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

  c. En déduire le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures.

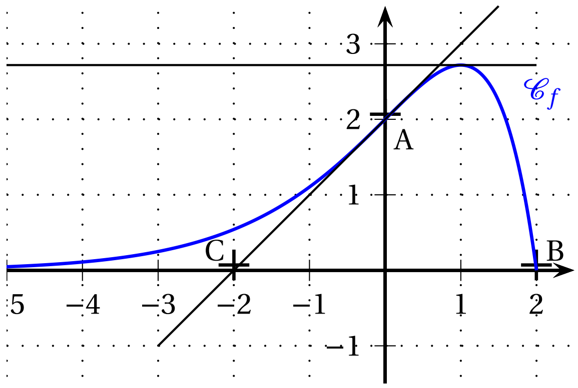
EXERCICE 2 **10 points**

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10 ; 2]$. On a placé les points A$(0 ; 2)$, B$(2 ; 0)$ et C$(-2 ; 0)$.

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-5 ; 2]$.
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5 ; 2]$.
6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe, et celui sur lequel elle est concave.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.

On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ par :

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x.$$

.

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
   a. Montrer que $f'(x) = (1-x)e^x$ pour tout nombre x de l'intervalle $]-\infty ; 2]$.
   b. En déduire la valeur de $f'(1)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en déduire une conséquence graphique .
4. **a.** Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty ; 1]$, puis donner une valeur approchée au centième de cette solution . On admet qu'il existe une unique solution de l'équation $f(x) = 1$ dans $[1 ;2]$
5. Déterminer f"(x) puis en déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe .