DS 4 Terminale 7 décembre 2020

Spécialité Mathématiques

EXERCICE **10 points**

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. **a.** Montrer que $f(x) = x\left(1 - \dfrac{lnx}{x}\right) - ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x}{x+1}$
3. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
4. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $\ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante

   c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer ℓ
4. **a.** Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-4}.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-4}.