DS 6 Terminale 15 mars 2021

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **12 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0~;~+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0~;~+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0~;~+\infty[$,
$f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3-\ln\left(f(t)\right)]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0~;~+\infty[$, $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$\text{(H)} \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0~;~+\infty[$

$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto \text{e}^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.

c. Résoudre dans $[0~;~+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à $0,999$. Ce test est-il fiable ?

EXERCICE 2 **8 points**

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 2 ; −3), B(−3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; −1).

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.
3. Soit I le point de coordonnées (−5 ; 9 ; 4). Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).
4. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).
5. En déduire la distance du point I au plan (ABC).