DS 6 Terminale 16 mars 2021

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est
$y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + \frac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle :
   (E') $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   b. Résoudre l'équation différentielle (E').
   c. Conclure.
3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

EXERCICE 2 **10 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;\,1\,;\,5)$ et le plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne $x+2y-7=0$.
   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires.
   b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$.
   c. Soit le point A(5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{R}$. On admet que la distance de A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{3\sqrt{30}}{5}$
   d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.
2. **a.** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t\,;\,3-t\,;\,t)$.
   Déterminer en fonction de t la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.
   c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.