## *corrigé DS 1 spécialité maths terminale*

**Exercice 1**

1. *On a :* $M(x;x^2)$ *donc* $AM^2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x^2 - \dfrac{5}{4}\right)^2 = x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 - x + \dfrac{29}{16}$

2. $f'(x) = 4x^3 - 3x - 1$

3. *On doit donc résoudre :* $4x^3 - 3x - 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ *ce qui donne* $a = 4$, $c = 1$ *et* $b = 4$ *d'où :* $f'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 1)$

4. *On a :* $f'(x) = (x-1)(2x-1)^2$ *donc* $f'(x)$ *est du signe de* $x - 1$ *; d'où le tableau de variations suivant :*

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\dfrac{5}{16}$ | $\nearrow$ | |

5. *Le point M est le plus proche de A quand* $AM^2$ *est minimale donc quand f est minimale et donc pour* $x = 1$ *. C'est donc le point M(1;1) qui est le plus proche de A .*

6. (a) $y = 2(x-1) + 1$ *donc* $y = 2x - 1$

   (b) $T_B$ *a pour vecteur directeur* $\overrightarrow{u}(1;2)$ *.* $\overrightarrow{AB}\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)$ *. Calculons le produit scalaire :*
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} \times 2 = 0$ *. Donc* $(AB)$ *et* $T_B$ *sont perpendiculaires .*

**Exercice 2**

1. (a) *On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :*

   $u_1 = 2 + \dfrac{1}{3} \approx 2,33$ $\qquad$ $u_2 = 2 + \dfrac{8}{9} \approx 2,89$

   $u_3 = 3 + \dfrac{16}{27} \approx 3,59$ $\qquad$ $u_i = 4 + \dfrac{32}{81} \approx 4,40$

   (b) *On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.*

2. (a) *Nous allons procéder par récurrence :*

   Identification de la propriété : *Pour tout entier naturel* $n$*, posons la propriété* $\mathcal{P}_n$ *suivante :* $u_n \leqslant n + 3$.

   Initialisation : *Puisque l'on a* $u_0 = 2$ *et* $0 + 3 = 3$*, on vérifie bien :*

   $u_0 \leqslant 0 + 3$ : la propriété $\mathcal{P}_0$ est bien vraie.

   Hérédité : *Pour un entier* $k$ *naturel donné, on suppose la propriété* $\mathcal{P}_k$ *vraie.*

*On a* $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1$.
*Par hypothèse de récurrence :* $u_k \leqslant k + 3$
*En multipliant par un nombre positif :* $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}(k+3)$
*Soit* $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}k + 2$
*Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre :*
$\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leqslant \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1$
*Ce qui donne :* $u_{k+1} \leqslant k + 3 \leqslant k + 4$. *On a donc* $u_{k+1} \leqslant (k+1) + 3$, *c'est à dire que la propriété* $\mathcal{P}_{k+1}$ *est vraie.*

Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés $\mathcal{P}_n$.

Conclusion : *Puisque la propriété* $\mathcal{P}_0$ *est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire que pour tout entier naturel* $n$, *on a* $\mathcal{P}_n$ *vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel* $n$, *on a bien* $u_n \leqslant n + 3$.

(b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$
*On a donc bien* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

(c) *Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout* $n$ *naturel, on a* $u_n \leq n+3$ *ce qui équivaut à dire que la différence* $n+3-u_n$ *est positive, et elle le reste en étant multipliée par* $\frac{1}{3}$, *donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien croissante, dès le rang 0.*

3. (a) *Exprimons, pour un entier* $n$ *naturel quelconque,* $v_{n+1}$ *en fonction de* $v_n$ *:*
$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$
*Donc* $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.
*La relation de récurrence obtenue confirme que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien géométrique de raison* $q = \frac{2}{3}$ *et de premier terme* $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

(b) *On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite* $v$ *:*
$v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
*Enfin, puisque l'on a, pour tout* $n$, $v_n = u_n - n$, *on en déduit :*
$u_n = v_n + n$, *et donc on aboutit bien à l'expression demandée :*
$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

(c) *Puisque la raison* $q$ *est strictement comprise entre* $-1$ *et* $1$, *on en déduit que la limite de la suite* $v$ *est 0, et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite* $u$ *est donc* $+\infty$, *et la suite* $u$ *est donc divergente.*

4. (a) *$S_n$ est la somme de $n+1$ termes de la suite $u_n$. Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme $u_n$ est la somme de $v_n$ et de $n$, donc en réordonnant les termes, $S_n$ est la somme de deux sous-sommes : celle des $n+1$ premiers termes de la suite $v$ et celle des $n+1$ premier entiers naturels.*

   *La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :*

   $$v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

   *La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut :*

   $\frac{0+n}{2} \times (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ *(résultat classique).*

   *Finalement, on a $S_n = 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$.*

   (b) *On en déduit : $T_n = \dfrac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$*

   $$T_n = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

   $$T_n = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

   *Puisque, une fois encore, $q$ est entre $-1$ et 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.*

   *Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites :*

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6.$

   *Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc par limite d'un quotient de suites,*

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0.$

   *De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite $T$ converge vers $\frac{1}{2}$.*